बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु ऐतिहासिक पहल...

शेखावाटी मिशन-100

गणित

कक्षा-12

कार्यालय : संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)
प्रभारी : शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक, सीकर

: missionshekhawati100@gmail.com | 9413361111, 9828336296

टीम शेखावाटी मिशन-100

संतोष कुमार महर्षि
संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा)
चुरु संभाग
चुरु (राज.)

रामचन्द्र पिलानियां
मुख्य जिला शिक्षा अधिकारी
सीकर (राज.)

पितराम सिंह काला
मुख्य जिला शिक्षा अधिकारी
झुन्झुनूं (राज.)

मनोज कुमार ढाका
जिला शिक्षा अधिकारी
झुन्झुनूं (राज.)

निसार अहमद खान
जिला शिक्षा अधिकारी
चुरु (राज.)

महेन्द्र सिंह बड़सरा
सहायक निदेशक (स.शै.प्र.)
कार्यालय संयुक्त निदेशक, चुरु

हरदयाल सिंह फगेड़िया
अति.जिला शिक्षा अधिकारी (शै.प्र.)
सीकर (राज.)

रामचन्द्र सिंह बगड़िया
अति.जिला शिक्षा अधिकारी
सीकर (राज.)

नीरज सिहाग
अति.जिला शिक्षा अधिकारी (शै.प्र.)
झुन्झुनूं (राज.)

सांवरमल गहनोलिया
अति. जिला शिक्षा अधिकारी (शै.प्र.)
चुरु (राज.)

महेश सेवदा
सहसंयोजक शेखावाटी मिशन-100
सीकर (राज.)

रामावतार भदाला
सहसंयोजक शेखावाटी मिशन-100
सीकर (राज.)

तकनीकी सहयोग

राजीव कुमार, निजी सहायक | पवन ढाका, कनिष्ठ सहायक | महेन्द्र सिंह कोक, सहा. प्रशा. अधिकारी | अभिषेक चौधरी, कनिष्ठ सहायक | दीपेन्द्र, कनिष्ठ सहायक

जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक (मुख्यालय), सीकर

शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक, सीकर

शेखावाटी मिशन-100

बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन कार्यक्रम सत्र : 2021-2022

उच्च माध्यमिक परीक्षा - 2022

विषय : गणित-12

सर्वश्रेष्ठ सफलता सुनिश्चित करने हेतु सर्वश्रेष्ठ संकलन

जितेन्द्र फेनिन

संयोजक गणित

रा.उ.मा.वि.,मुण्डवाड़ा (सीकर)

गोपाल सिंह गढ़वाल

रा.उ.मा.वि., खाटूश्यामजी (सीकर)

मंजू सोहू

रा.उ.मा.वि., पिपराली (सीकर)

मुकेश रेवाड़

रा.उ.मा.वि., मंगलूणा (सीकर)

बजरंग सिंह

रा.उ.मा.वि., काछवा (सीकर)

शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक, सीकर

कक्षा - 12 (Maths)

(संबंध एवं फलन)

अध्याय - 01

1. समुच्चय {a, b} में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है-

   (अ) 16 (ब) 10 (स) 20 (द) 8

2. यदि A = {1, 2, 3} हो तो अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है-

   (अ) 1 **(ब)** 2 (स) 3 (द) 4

3. यदि $R \rightarrow R$, $F(x) = (3 - x^3)^{1/3}$, द्वारा प्रदत्त है, तो FOF (x) =

   (अ) $x^{1/3}$ (ब) x^3 **(स)** x (द) $(3 - x^3)$

4. यदि $F : R \rightarrow R$, $F(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है, तो सही उत्तर होगा-

   (अ) F एकैकी आच्छादक है (ब) F बहुएकैकी आच्छादक है

   (स) F एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है **(द)** F न एकैकी है और न आच्छादक है

5. R से R में परिभाषित निम्न में से कौनसा फलन एकैकी है-

   (अ) $F(x) = |x|$ (ब) $F(x) = \cos x$ **(स)** $F(x) = e^x$ (द) $F(x) = x^2$

6. समुच्चय A = {1, 2, 3} से स्वयं तक सभी एकैकी फलन की संख्या होगी-

   (अ) 3 (ब) 4 (स) 8 **(द)** 6

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये :

7. $F : R \rightarrow R$, $F(x) = 4x + 3$, व्युत्क्रमणीय फलन है, तो $F^{-1}(x)$ = ... होगा ?

Ans. $F(x) = 4x + 3$, $F : R \rightarrow R$ में एकैकी आच्छादक है

$$\Rightarrow y = 4x + 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{y-3}{4}$$

$$F^{-}(y) = \frac{y-3}{4}$$

अत: $F^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{4}$

8. $F(x) = \dfrac{4x+3}{6x-4}$, $x \neq \dfrac{2}{3}$ तो FOF(x) = ... होगा ?

Ans. $F(x) = \dfrac{4x+3}{6x-4}$

$$FOF(x) = F\{F(x)\} = F\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right) = \frac{4\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right)+3}{6\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right)-4}$$

$$= \frac{4(4x+3)+3(6x-4)}{6(4x+3)-4(6x-4)}$$

$$= \frac{16x+12+18x-12}{24x+18-24x+16} = \frac{34x}{34} = x$$

शेखावाटी मिशन - 100

अतः $FOF(x) = x$

9. समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R के लिए यदि समस्त a, b, c ∈ A के लिए (a, b) ∈ R तथा (b, c) ∈ R से (a, c) ∈ R प्राप्त हो, तो संबंध R .... कहलाता है?

Ans. संक्रामक संबंध

10. सिद्ध कीजिये की वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में संबंध $R = \{(a, b) ; a \le b\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है?

Ans. $R = \{(a, b); a \le b\}$

(i) स्वतुल्य : $a \le a$ सत्य है

$a = a \ \forall \ a \in R$

$\Rightarrow$ R स्वतुल्य है

(ii) R सममित नहीं है क्योंकि यदि a, b से कम है, तो b, a से कम नहीं हो सकता है।

(iii) $a, b, c \in R$ के लिए $a \le b, b \le c \Rightarrow a \le c$

अतः R संक्रामक संबंध है।

R, स्वतुल्य, संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

11. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय (1, 2, 3} में $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R सममित है किन्तु न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक है?

Ans. समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$

संबंध $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$

$\because (1, 1), (2, 2), (3, 3) \notin R \Rightarrow R$ स्वतुल्य नहीं है।

$\because (1, 2) \in R \Rightarrow (2, 1) \in R \Rightarrow R$ सममित है।

$(1, 2) \in R, (2, 1) \in R$ लेकिन $(1, 1) \notin R \Rightarrow R$ संक्रामक नहीं है।

$\Rightarrow$ R सममित है परन्तु स्वतुल्य और संक्रामक नहीं है।

12. यदि $F : R - \{3\} \rightarrow R - \{1\}$ द्वारा परिभाषित फलन $F(x) = \frac{x-2}{x-3}$ तो, सिद्ध कीजिये कि F एकैकी आच्छादक है?

Ans. एकैकी : माना $x_1, x_2 \in R - \{3\}$, इस प्रकार है कि

$$F(x_1) = F(x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - 2}{x_1 - 3} = \frac{x_2 - 2}{x_2 - 3}$$

$$\Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 3) = (x_2 - 2)(x_1 - 3)$$

$$\Rightarrow x_1x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6 = x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6$$

$$\Rightarrow -3x_1 + 2x_1 = -3x_2 + 2x_2$$

$$\Rightarrow -x_1 = -x_2$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ अतः फलन F एकैकी है।

आच्छादक : $y = F(x) = \frac{x-2}{x-3}$

$$\Rightarrow y(x - 3) = x - 2$$

$$\Rightarrow xy - 3y = x - 2$$

$$\Rightarrow xy - x = 3y - 2$$

शेखावाटी मिशन - 100

$$x = \frac{3y-2}{y-1};\ y \neq 1, \frac{3y-2}{y-1} \in R - \{1\}$$

$\Rightarrow$ दिया गया फलन आच्छादक है।

अतः F एकैकी आच्छादक फलन है।

13. यदि $F(x) = 8x^3$ तथा $g(x) = x^{1/3}$ तो goF(x) तथा Fog(x) ज्ञात करो ?

Ans. $F(x) = 8x^3,\ g(x) = x^{1/3}$

$goF(x) = g\{F(x)\} = g(8x^3) = (8x^3)^{1/3} = 8^{1/3}(x^3)^{1/3} = 2x$

$Fog(x) = F\{g(x)\} = F(x^{1/3}) = 8(x^{1/3})^3 = 8x$

14. सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय पर $a * b = \frac{ab}{2}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है। Q में * का तत्समक अवयव भी ज्ञात कीजिए ?

Ans. Q पर * संक्रिया

$$a * b = \frac{ab}{2}$$

$$b * a = \frac{ba}{2} = \frac{ab}{2}\ \ \forall\ a, b \in Q$$

$\therefore\ a * b = b * a\ \Rightarrow$ संक्रिया क्रम विनिमेय द्विआधारी है।

तथा $a * (b * c) = a * \left(\frac{bc}{2}\right) = \frac{a.\frac{bc}{2}}{2} = \frac{abc}{4}\ \ \forall\ a, b, c \in Q$

$$(a * b) * c = \frac{ab}{2} \times c = \frac{\frac{ab}{2}.c}{2} = \frac{abc}{4}\ \forall\ a, b, c \in Q$$

$\therefore\ a * (b * c) = (a * b) * c\ \ \Rightarrow$ संक्रिया साहचर्य द्विआधारी है।

पुनः माना तत्समक e है तो $e * a = a * e = a$

$$\Rightarrow \frac{ea}{2} = a \qquad \Rightarrow e = 2$$

अतः संक्रिया का तत्समक अवयव 2 है।

15. समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में a ^ b = निम्नतम {a, b} द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया सारणी लिखिये ?

Ans. समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5}

a ^ b = निम्नतम {a, b}

1^1 = निम्नतम {1, 1} = 1

1^2 = निम्नतम {1, 2} = 1

इसी प्रकार 3 ^ 4 = निम्नतम {3, 4} = 3

संक्रिया सारणी

$\wedge$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

शेखावाटी मिशन - 100

कक्षा - 12 (Maths)
(प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन)
अध्याय - 02

1. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है–

(अ) $\frac{7\pi}{6}$ **(ब)** $\frac{5\pi}{6}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{6}$

2. $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$ का मान –

(अ) π **(ब)** $-\frac{\pi}{3}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{2\pi}{3}$

3. $\sin(\tan^{-1} x)$ बराबर होगा ; $|x| < 1$

(अ) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ब) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (स) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **(द)** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

4. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ का मान है–

(अ) $\frac{\pi}{2}$ (ब) $\frac{\pi}{3}$ **(स)** $\frac{\pi}{4}$ (द) $-\frac{3\pi}{4}$

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

5. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) =$ ....

हल : $\because \sin^{-1}(\sin x) = x \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\because \sin\frac{3\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ तथा $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

अतः $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$

6. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान होता है–

हल : माना $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

इसलिए $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{4}$ है।

7. $\cos(\sec^{-1} x + \text{cosec}^{-1} x)$ का मान होता है जहां $|x| \geq 1$

हल : $\because \sec^{-1} x + \text{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, यदि $|x| \geq 1$

अतः $\cos(\sec^{-1} x + \text{cosec}^{-1} x) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

शिक्षा वाणी मिशन - 100

8. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिये–

हल : माना $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$ $\Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ $\Rightarrow \cos\theta=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$

अतः $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ है।

9. दर्शाइये कि $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)=\tan^{-1}\frac{3}{4}$

हल : L.H.S. $=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{15}{20}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=\text{R.H.S.}$$

10. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ का मान ज्ञात कीजिये–

हल : $\tan^{-1}$ की मुख्य शाखा $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ है

$$\therefore \tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)=\tan^{-1}\left[\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\tan^{-1}\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) \qquad =-\frac{\pi}{4}$$

अतः $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$

11. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$, $0<x<\pi$ को सरलतम रूप में लिखिये –

हल : $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right)$

$$=\tan^{-1}\left(\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}\right) \qquad [\because 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2} \text{ तथा } 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}]$$

$$=\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \qquad =\frac{x}{2}$$

शेखावाटी मिशन – 100

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

अतः $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)=\frac{x}{2},\ x\in(0,\pi)$

12. यदि $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए–

हल : $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2x+3x}{1-2x.3x}\right)=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{5x}{1-6x^2}=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\Rightarrow 5x=1-6x^2$

$\Rightarrow 6x^2+5x-1=0$

$\Rightarrow (6x-1)(x+1)=0$

$x=\frac{1}{6}$ या $x=-1$ ($x=-1$ समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है)

अतः $x=\frac{1}{6}$ होगा।

13. दर्शाइये कि $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\sin^{-1}\frac{8}{17}=\cos^{-1}\frac{84}{85}$

हल : माना $\sin^{-1}\frac{3}{5}=x$ तथा $\sin^{-1}\frac{8}{17}=y$

$\Rightarrow \sin x=\frac{3}{5},\ \sin y=\frac{8}{17}$

अतः $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\sqrt{\frac{225}{289}}=\frac{15}{17}$

पुनः $\cos(x-y)=\cos x\,.\,\cos y+\sin x\,.\,\sin y$

$\Rightarrow \cos(x-y)=\frac{4}{5}\times\frac{15}{17}+\frac{3}{5}\times\frac{8}{17}=\frac{60+24}{85}=\frac{84}{85}$

$\Rightarrow \cos(x-y)=\frac{84}{85}$

$\Rightarrow x-y=\cos^{-1}\frac{84}{85}$

$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{3}{5}-\sin^{-1}\frac{8}{17}=\cos^{-1}\frac{84}{85}$

14. सिद्ध कीजिए कि $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}$

हल : L.H.S. $=2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$

शेखावाटी मिशन – 100

$$= \tan^{-1}\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\tan^{-1}\frac{1}{7} \qquad \left[\because 2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}}\right) \qquad \left[\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{28+3}{21}}{\frac{21-4}{21}}\right)=\tan^{-1}\frac{31}{17}=\text{R.H.S.}$$

15. सिद्ध कीजिए : $\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

हल : L.H.S. $= \tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}}\right) \qquad \left[\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{7+5}{35-1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{8+3}{24-1}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{12}{34}+\tan^{-1}\frac{11}{23}$$

$$= \tan^{-1}\frac{6}{17}+\tan^{-1}\frac{11}{23}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{6}{17}+\frac{11}{23}}{1-\frac{6}{17}\times\frac{11}{23}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{138+187}{391}}{\frac{391-66}{391}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{325}{325}\right)$$

$$= \tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}=\text{R.H.S.}$$

16. सिद्ध कीजिए $\frac{9\pi}{8}-\frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3}=\frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

हल : L.H.S. $= \frac{9\pi}{8}-\frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3}$

शेखावाटी मिशन - 100

$= \frac{9}{4}\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{3}\right]$

$= \frac{9}{4}\cos^{-1}\frac{1}{3}$ $\left[\because \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x\right]$

$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$ $\left[\because \cos^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right]$

$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\sqrt{\frac{8}{9}}$

$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3} = \text{R.H.S.}$

17. x का मान ज्ञात कीजिए यदि $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

हल : दी गई समीकरण

$2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}\right) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$ $\left[\because 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$

$\Rightarrow \frac{2\cos x}{\sin^2 x} = 2\operatorname{cosec} x = \frac{2}{\sin x}$

$\Rightarrow 2\cos x.\sin x = 2\sin^2 x$

$\Rightarrow 2\cos x.\sin x - 2\sin^2 x = 0$

$\Rightarrow 2\sin x(\cos x - \sin x) = 0$

$\cos x - \sin x = 0$ या $2\sin x = 0$

$\Rightarrow \tan x = 1$ $\sin x = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ या $x = 0$ ($x = 0$ समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है)

अतः $x = \frac{\pi}{4}$

18. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; $x \in [0,1]$

हल : R.H.S. $= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

[माना $x = \tan^2\theta \Rightarrow \sqrt{x} = \tan\theta$]

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta)$ $\left[\because \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$

$= \frac{1}{2}.2\theta$ $= \theta$ $= \tan^{-1}\sqrt{x} = \text{L.H.S.}$

कक्षा - 12 (Maths)

(आव्यूह खण्ड- अ)

अध्याय - 03

1. ***निम्न लिखित बहुविकल्पीय प्रश्नो को हल कीजिए-***

1. $A = [aij]\ m \times n$ एक पंक्ति आव्युह है, यदि-

(a) $m < n$ **(b)** $m > n$ (c) $m = n$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि A एक सममित एवं विषम सममित आव्युह दोनों ही है तो-

(a) A एक विकर्ण आव्युह है **(b)** A एक शून्य आव्युह है

(c) A एक वर्ग आव्युह है (d) इनमें से कोई नहीं

3. आव्युह A या B एक दूसरे के व्युत्क्रम आव्युह होगें केवल यदि -

(a) $AB = BA$ (b) $AB = BA = 0$ (c) $AB = 0, BA = I$ **(d)** $AB = BA = I$

4. यदि A एवं B समान कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्युह है तो $(AB)^{-1}$ का मान क्या होगा-

(a) $A^{-1}B^{-1}$ (b) AB^{-1} (c) $A^{-1}B$ **(d)** $B^{-1}A^{-1}$

5. यदि A एवं B समान कोटि के सममित आव्युह है तो $AB - BA$ एक -

(a) विषम सममित आव्युह है (b) सममित आव्युह है

(c) शून्य आव्युह है (d) तत्तसम आव्युह है

6. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A^1 = I$ तो α का मान है-

(a) $\pi/6$ **(b)** $\pi/3$ (c) π (d) $3\pi/2$

7. यदि $A^1 = A$ हो, तो A आव्युह होगा- (जहाँ A^1 आव्युह A का परिवर्त है)

(a) सममीत आव्युह (b) विषमसममीत आव्युह (c) स्तम्भ आव्युह (d) पक्ति आव्युह

8. 3×3 कोटि के ऐसे आव्युहों की कुल संख्या कितनी होगी, जिनकी प्रविष्ट 0 या 1 है-

(a) 27 (b) 18 (c) 81 **(d)** 512

9. यदि किसी आव्युह में 8 आव्युह है तो संभव आव्युहों की संख्या किनती हो सकती है-

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1

10. यदि $A = [aij]_{2\times 2}$ निम्न प्रकार परिभाषित है कि $aij = i - 2j$ तो a_{21} का मान क्या होगा-

(a) 1 (b) 4 (c) –2 **(d)** 0

11. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, तब A^n (जब $n \in N$) बराबर है-

(a) $\begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & a^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} n & na \\ 0 & n \end{bmatrix}$

12. $\cos\theta\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ का हल है-

शैक्षणिक मिशन - 100

(a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

13. यदि कोई दो वर्गाकार आव्युह A, B के लिए AB = A, BA = B, तो A^2 बराबर है–

(a) A (b) B (c) adj(A) (d) A^2

14. यदि $A=[aii]_{3\times3}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 7\\3 & 2 & -1\\0 & 5 & 6\end{bmatrix}$ है, तो $a_{12}+a_{23}$ बराबर है–

(a) a_{11} (b) a_{32} **(c)** a_{31} (d) a_{13}

15. यदि $A_{3\times2}$ एवं $B_{2\times4}$ क्रम के आव्युह हो तो, AB का क्रम होगा–

(a) 3 × 2 (b) 2 × 3 **(c)** 3 × 4 (d) 4 × 3

16. $A=[aij]_{2\times3}$ आव्युह है, जहाँ $aij\neq0$

(a) वर्ग आव्युह (b) पक्ति आव्युह (c) शून्य आव्युह **(d)** स्तम्भ आव्युह

2. निम्न प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करें–

1. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ एवं $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\-1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ तो $A+B=\begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए–

Sol. $A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\-1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}1+3 & 2+(-1) & 3+3\\2+(-1) & 3+0 & 1+2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 1 & 6\\1 & 3 & 3\end{bmatrix}$

2. यदि A एवं B का गुणन संभव हो, तो $(AB)^1$ = ... होगा–

Sol. $(AB)^1=B^1A^1$

3. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & x\\4 & -2\end{bmatrix}$ एक सममित आव्युह है तो x का .... का मान होगा–

Sol. सममित आव्युह:– किसी आव्युह का परिवर्त अगर उसी आव्युह के समान हो तो सममित आव्युह कहलाता है अर्थात् $A^1=A$

यहाँ $A^1=\begin{bmatrix}2 & 4\\x & -2\end{bmatrix}$ तो सममीत आव्युह होगी

$A^1=A\Rightarrow\begin{bmatrix}2 & 4\\x & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & x\\4 & -2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow \boxed{x=4}$

4. आव्युह, $A+A^1$ .... आव्युह होगा–

Sol. माना $P=A+A^1$ तो

$P^1=\left(A+A^1\right)^1=A^1+\left(A^1\right)^1=A^1+A$

$\therefore\left(A^1\right)^1=A$ $=A+A^1=P$

शेखावाटी मिशन – 100

$\therefore P^1 = P$ तो P सममीत होगी

अत: $A + A^1$ सममीत आव्युह होगी–

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न–

1. यदि $A = [aij]_{2\times2}$ आव्युह इस प्रकार परिभाषित है कि $aij = \frac{i+2j}{2}$ तो आव्युह A ज्ञात कीजिए–

Sol. माना $A_{2\times2}$ का आव्युह निम्न प्रकार का है $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ प्रश्नानुसार $aij = \frac{i+2j}{2}$

अत: $a_{11} = \frac{1+2\times1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$a_{12} = \frac{1+2\times2}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$

$a_{21} = \frac{2+2\times1}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$a_{22} = \frac{2+2\times2}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$

अत: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 5/2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. यदि A एवं B समान आव्युह है, तो x, y, z का मान ज्ञात कीजिए। जहाँ $A = \begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

Sol. समान आव्युह :– दो आव्युह समान आव्युह कहलाते है यदि उनमें पक्ति एवं स्तम्भ की संख्या समान हो तथा उनके संगत अवयव समान हो।

प्रश्नानुसार A एवं B समान अव्यव दिए गये है अत: A = B होगा

$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

अत: संगत अवयवों की तुलना करने पर

$x + y = 6$ .... (1) $5 + z = 5$ .... (2)

$xy = 8$ ....(3)

समीकरण (3) से $5 + z = 5$ $\Rightarrow z = 5 - 5 = 0$

समीकरण (1) एवं (3) से हम जानते है कि

$\Rightarrow x - y = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy}$

$x - y = \sqrt{(6)^2 - 4\times8} - \sqrt{36-32} - \sqrt{4} = 2$

$x - y = 2$ ....(4)

समीकरण (1) एवं (4) से $x + y = 6$

जोड़ने पर $x - y = 2$

शेखावाटी मिशन – 100

जोड़ने पर $2x = 8$ $\Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$

समीकरण (1) एवं (4) से $x + y = 6$

घटाने पर $x - y = 2$

$\quad + \quad -$

$2y = 4$ $\Rightarrow y = 2$

अतः $x = 4, y = 2, z = 0$

3. यदि $x + y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ हो तो x एवं y का मान ज्ञात कीजिए-

Sol. प्रश्नानुसार $x + y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$......................(1)

$x - y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$......................(2)

समीकरण (1) एवं (2) का योग करने पर

$$(x+y)+(x-y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+3 & 2+6 \\ 0+0 & 9-1 \end{bmatrix}$$

$$2x = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर

$$(x+y)-(x-y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

अतः $x = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ एवं $y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

4. यदि $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ तो x एवं y का मान ज्ञात कीजिए-

Sol. प्रश्नानुसार $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

शेखावाटी मिशन - 100

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2+y & 6+0 \\ 0+1 & 2x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} 2+y & 6 \\ 1 & 2x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

दोनों आव्युह समान आव्युह होने के कारण संगत अव्यवों की तुलना करने पर

$2+y=5$ $\qquad \Rightarrow y = 5-2 = 3$

एवं $2x+2=8$ $\qquad \Rightarrow 2x = 8-2 = 6$ $\qquad \Rightarrow 2x = 6$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow 3$$

अत: $x = 3$ एवं $y = 3$

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित किजिए कि $(A+B)^1 = A^1 + B^1$

Sol. प्रश्नानुसार $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A+B) = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}^1$$ (संगत अवयवों का योग करने पर)

$$(A+B)^1 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$ $(A + B)$ का परिवर्त आव्युह $= (A + B)^1$

R.H.T इसी प्रकार $A^1 + B^1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

समीकरण (1) एवं (2) की तुलना करने पर $(A+B)^1 = A^1 + B^1$ इतिसिद्धम्

6. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A^1{}_A = I$ होगा–

Sol. प्रश्नानुसार $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ का परिवर्त आव्युह निम्न होगा

$$A^1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

अत: $A^1A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

शेखावाटी मिशन - 100

$$A^1A = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ इतिसिद्धम् $\therefore \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

7. यदि $P = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो P^{-1} ज्ञात कीजिए, यदि इसका अस्तित्व है–

Sol. P = IP लिखिए अर्थात्

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P$$

या $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P$ $\left(R_1 \to \frac{1}{10}R_1\right.$ द्वारा)

या $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} P$ $(R_2 \to R_2 + 5R_1$ द्वारा)

यहाँ बाएं पक्ष में आत्युह की द्वितीय पंक्ति के सभी अवयव शून्य हो जाते है अतः P^{-1} का अस्तित्व नहीं है।

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध किजिए $(A + A^1)$ एक सममित आव्युह है।

Sol. प्रश्नानुसार $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

अतः $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

माना $P = A + A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$

अब $P = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}, P^1 = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$

अतः $P^1 = P$ अर्थात् $(A + A^1)^1 = (A + A^1)$

अतः $A + A^1$ सममीत आव्युह है।

9. आव्युह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ हो तो क्या AB = BA संभव है? यदि संभव हो तो ज्ञात कीजिए।

Sol. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

शेखावाटी मिशन – 100

अतः $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ ....(1)

इसी प्रकार $BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ ....(2)

समीकरण (1) एवं (2) से सत्यापित होता है कि AB = BA संभव है।

10. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $AB \neq BA$

Sol. प्रश्नानुसार $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 1+0 \\ 0-1 & 0+0 \end{bmatrix}$$

अतः $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ....(1)

इसी प्रकार $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0-1 \\ 1+0 & 0+0 \end{bmatrix}$

अतः $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ....(2)

अतः समीकरण (1) एवं (2) से सिद्ध होता है कि

$\boxed{AB \neq BA}$

आव्युह खण्ड-ब

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ एवं $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $A^2 = KA - 2I$ हो तो K का मान ज्ञात कीजिए-

Sol. प्रश्नानुसार $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

या $A^2 = \begin{bmatrix} 9-8 & -6+4 \\ 12-8 & -8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

प्रश्नानुसार दिया गया है कि आव्युह A निम्न समीकरण को संतुष्ट करता है $A^2 = KA - 2I$ ....(1)

समीकरण (1) में A^2, A एवं I का मान रखने पर

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ या $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

शेखावाटी मिशन – 100

या $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

संगत अवयवों की तुलना करने पर 3 = 3K

$\Rightarrow \boxed{K = 1}$

2. यदि $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ तथा $B - \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^1 = B^1A^1$

Sol. प्रश्नानुसार $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

एवं $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ $B^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

अतः $AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}$

$(AB)^1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix}$ ....(1) $B^1A^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$B^1A^1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix}$ ....(2)

समीकरण (1) एवं (2) से सिद्ध होता है कि $(AB)^1 = B^1A^1$ इतिसिद्धम्

3. आव्युह $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ को एक सममीत एवं विषम सममीत आव्युह के योगफल के रूप में लिखिए-

Sol. प्रश्नानुसार $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A^1 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ अब माना $P = \frac{1}{2}(A + A^1)$

शेखावाटी मिशन – 100

$$P=\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}\right]$$

$$P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}12&-4&4\\-4&6&-2\\4&-2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}\text{.......................}(1)$$

एवं $Q=\frac{1}{2}\left(A-A^1\right)$ $$=\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}\right]$$

$$Q=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\text{............................}(2)$$

अब $P^1=\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}=P$

अत: $P^1=P\rightarrow$ सममीत आव्युह

$$Q'=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=-Q$$

$Q'=-Q$ $\Rightarrow$ विषम सममीत

अत: $A=P+Q$

जहाँ $P\rightarrow$ सममीत आव्युह है एवं $Q\rightarrow$ विषम सममीत है अत: आव्युह A को सममीत एवं विषम सममीत के योगफल के रूप में व्युक्त कर सकते है। (इतिसिद्धम्)

4. x के किस मान के लिए $\begin{bmatrix}1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&1\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\x\end{bmatrix}=0$ है–

Sol. प्रश्नानुसार $\begin{bmatrix}1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&1\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\x\end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1+4+1&2+0+0&0+2+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\x\end{bmatrix}=0$ $\Rightarrow\begin{bmatrix}6&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\x\end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow\left[6\times0+2\times2+4\times x\right]=0$

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

$\Rightarrow [0+4+4x]=0$ $\Rightarrow [4+4x]=0$

$\Rightarrow$ संगत अवयवों की तुलना करने पर

$4 + 4x = 0$ $\Rightarrow 4x = -4$

$\Rightarrow x = \frac{-4}{4} = -1$

अतः $\boxed{x=-1}$

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$

Sol. यदि प्रश्नानुसार $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ तो

या $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ या $A^2 = \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

L.H.S $A^2 - 5A + 7I$ [A^2, A, I का मान रखने पर]

या $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ या $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R.H.S$

अतः $A^2 - SA + 7I = 0$ सिद्ध होता है

6. यदि $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध किजिए कि $F(x).F(y) = f(x+y)$

Sol. प्रश्नानुसार $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

तो $F(y) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

L.H.S $F(x).F(y) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

या $F(x).F(y)=\begin{bmatrix} \cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y & 0 \\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$F(x).F(y)=\begin{bmatrix} \cos x\cos y-\sin x\sin y & -(\cos x\sin y+\sin x\cos y) & 0 \\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & \sin x\sin y-\sin x\sin y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \sin(x+y) & = & \sin x\cos y & + & \cos x\sin y \\ \cos(x+y) & = & \cos x\cos y & - & \sin x\sin y \end{bmatrix}$$

$$F(x).F(y)=\begin{bmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=F(x+y)$$ R.H.S

अतः $F(x).F(y)=F(x+y)$

7. यदि $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}=0$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए

Sol. $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}=0$

या $\begin{bmatrix} x+0-2 & 0-10+0 & 2x-5-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}=0$ या $\begin{bmatrix} x-2 & -10 & 2x-8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}=0$

या $\left[x(x-2) \quad -10\times 4 \quad +(2x-8)\times 1 \right]_{1\times 1}=0$

या $x^2-2x-40+2x-8=0$ या $x^2-48=0$

$\Rightarrow x^2=48$ $\Rightarrow x=\pm\sqrt{48}=\pm\sqrt{16\times 3}$

$\Rightarrow \boxed{x=\pm 4\sqrt{3}}$

8. प्रारभिक सक्रियाओं का प्रयोग करते हुए आव्युह $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ का व्युत्त्क्रम आव्युह ज्ञात कीजिए-

Sol. प्रारंभिक सक्रियाओं का प्रयोग करते हुए हम A = IA लिखते है अर्थात्

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}A$, तो $\therefore (R_2 \rightarrow R_2-2R_1$ के प्रयोग द्वारा)

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}A$ $\Rightarrow (R_2 \rightarrow -\frac{1}{5}R_2$ के प्रयोग द्वारा)

शेखावाटी मिशन - 100

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}A$$ $\Rightarrow$ ($R_1 \to R_1 - 2R_2$ के प्रयोग द्वारा)

अतः $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}$ है।

9. x का मान ज्ञात कीजिए यदि $y=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}$ तथा $2x+y=\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 2\end{bmatrix}$ है-

Sol. दिया गया है कि $y=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}$..........................(1)

एवं $2x+y=\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 2\end{bmatrix}$..........................(2)

समी (1) का मान समीकरण (2) में रखने पर

$\Rightarrow 2x+\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow 2x=\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2x=\begin{bmatrix}1-3 & 0-2\\-3-1 & 2-4\end{bmatrix}$ $\Rightarrow 2x=\begin{bmatrix}-2 & -2\\-4 & -2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & -2\\-4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{2} & \frac{-2}{2}\\\frac{-4}{2} & \frac{-2}{2}\end{bmatrix}$ $\Rightarrow x=\begin{bmatrix}-1 & -1\\-2 & -1\end{bmatrix}$

10. आव्युह $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & -2\\-1 & 4 & 3\\1 & -3 & 2\end{bmatrix}$ को एक सममीत आव्युह एवं विषम सममीत आव्युह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए –

Sol. प्रश्नानुसार $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & -2\\-1 & 4 & 3\\1 & -3 & 2\end{bmatrix}$

इसे सममीत विषम सममीत आव्युह के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है:-

$$A=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)+\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$$

जहाँ $\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$ सममीत आव्युह है एवं $\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$ विषम सममीत आव्युह है। अब

शेखावाटी मिशन – 100

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & -4-1 & -2+1 \\ -1-4 & 4+4 & 3-3 \\ 1-2 & -3+3 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -5 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -5 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-5}{2} & 4 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{..............(1)}$$

$$\therefore A - A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & -4+1 & -2+1 \\ -1+4 & 4-4 & 3+3 \\ 1+2 & -3-3 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 & 3 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{........................(2)}$$

अतः $A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-5}{2} & 4 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 & 3 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(सममीत) (विषम सममरीत) [(1) एवं (2) से]

कक्षा - 12 (Maths)
(सारणिक भाग - अ)
अध्याय - 04

वस्तुनिष्ठ प्रश्न/बहुविकल्पीय प्रयन

1. यदि A एक 3×3 कोटि का वर्ग आव्युह है तो $|-2A|$ का मान होगा-

(a) $2|A|$ (b) $4|A|$ (c) $-8A$ (d) $-4|A|$

Sol. यदि A एक $n \times n$ कोटि का आव्युह हो तो $|KA| = K^n|A|$ यहाँ $K = -2$

अत: $|-2A| = (-2)^3(A) = -8|A|$

विकल्प (c) सही उत्तर होगा।

2. यदि A, 3×3 कोटि का आव्युह है तो $|adj\ (A)|$ का मान है-

(a) $|A|$ (b) $|A|^2$ (c) $|A|^3$ (d) $3|A|$

Sol. यदि A, $n \times n$ Aकोटि का आव्युह है तो

$|adj\ (A)| = |A|^{n-1}$ यहाँ $n = 3$ है

$\therefore |adj\ (A)| = |A|^{3-1} = |A|^2$ विकल्प (b) सही है

3. यदि A कोटि 2 का व्युत्क्रमणीय आव्युह है तो $\det(A^{-1})$ बराबर है-

(a) $\det(A)$ (b) 1 (c) 0 (d) $\frac{1}{\det(A)}$

Sol. प्रश्नानुसार $|A| \neq 0$ $\Rightarrow AA^{-1} = I$

$\Rightarrow |AA^{-1}| = |I|$ $\Rightarrow |A||A^{-1}| = 1$

$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

विकल्प (d) सही है

4. सारणिक $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ का मान होगा-

(a) 2 (b) 0 (c) -2 (d) -1

Sol. $R_1 = 6R_3$ $\Rightarrow |A| = 0$

विकल्प (b) सही है

5. यदि A, $n \times n$ कोटि का अव्युत्क्रमणीय आव्युह है तो $|A|$ होगा-

(a) 8 (b) -2 (c) -1 (d) 0

Sol. प्रश्नानुसार A. n कोटि का अव्युत्क्रमणीय आव्युह है

अत: $|A| = 0$ $\Rightarrow$ विकल्प (d) सही है

शेखावाटी मिशन - 100

6. यदि $A=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ है तो A का adj (A) होगा–

(a) $\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & -5\\ +3 & -1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

Sol. विकल्प (b) सही होगा।

Short Trick :- 2×2 का आव्युह का विकर्ण अवयवों को आपस में बदल देते है तथा अविकर्ण अवयवों का चिन्ह परिवर्तन कर देते है अतः विकल्प (b) सही होगा।

7. यदि $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ और aij का सहगुणनखण्ड Aij हो तो Δ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है–

(a) $a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}$ (b) $a_{11}A_{13}+a_{12}A_{23}+a_{13}A_{33}$

(c) $a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{13}A_{13}$ (d) $a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$

Sol. विकल्प (d) सही होगा क्योंकि जिस पंक्ति या स्तम्भ के अनुसार प्रसार करते है उसी के सहणुनखण्ड से गुना करने पर सारणिक (Δ) का मान प्राप्त होता है।

8. निम्न सरणिक $\begin{vmatrix}2 & -4\\ 0 & 3\end{vmatrix}$ का मान होगा -

(a) –6 (b) 6 (c) –3 (d) 0

Sol. $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 0 & 3\end{vmatrix}=2\times 3-0\times(-4)=6-0=6$

अतः विकल्प (b) सही होगा।

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

1. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ तो दिखाइए |2A| = 4 |A|

Sol. प्रश्नानुसार $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

तो $|A|=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}=1\times 2-2\times 4=2-8=-6$ अब $2A=\begin{bmatrix}2\times 1 & 2\times 2\\ 2\times 4 & 2\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 8 & 4\end{bmatrix}$

$|2A|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 8 & 4\end{vmatrix}=2\times 4-4\times 8=4(4-8)=4(-6)=4|A|$

अतः $\boxed{|2A|=4|A|}$

2. यदि $\begin{vmatrix}3 & x\\ x & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए–

Sol. $\Rightarrow 3\times1 - x\times x = 3\times1 - 2\times4$ $\Rightarrow 3 - x^2 = 3 - 8$

$\Rightarrow x^2 = 8$ $\Rightarrow \boxed{x = \pm 2\sqrt{2}}$

3. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए–

Sol. पहली पंक्ति के अनुसार प्रसार करने पर

$\Delta = 3(6-6) - 2(6-9) + 3(4-6)$ $= 0 - 2(-3) + 3(-2) = 6 - 6 = 0$

Short Trick :- (R_1 एवं R_3 समान है।)

अतः किसी सारणिक में दो पंक्ति या दो स्तम्भ सर्वसम (समान) हो तो सारणिक का मान शून्य होता है।

4. बिना प्रसार किए, गुणधर्मी के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए– $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$

Sol. माना $\Delta = \begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix}$ सक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2$ से

$\Delta = \begin{vmatrix} x+a & a & x+a \\ y+b & b & y+b \\ z+c & c & z+c \end{vmatrix} = 0$ R.H.S ($\because C_1$ एवं C_3 सर्वसम है)

5. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (3, 8), (–4, 2) एवं (5, 1) है।

[यहाँ $(x_1, y_1) = (3, 8)$, $(x_2, y_2) = (-4, 2)$ एवं $(x_3, y_3) = (5, 1)$]

Sol. त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $= \frac{1}{2}\left[3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3(1) - 8(-9) + 1(-14)\right]$ $\Delta = \frac{1}{2}\left[3 + 72 - 14\right] = \frac{61}{2}$ वर्ग इकाई

6. सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) एवं (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए–

Sol. प्रश्नानुसार दिए गए बिन्दु (1, 2) एवं (3, 6) है माना (1, 2) एवं (3, 6) को मिलाने वाली रेखा पर कोई बिन्दु (x, y) है। अतः बिन्दु (1, 2), (3, 6) एवं (x, y) संरेख है जिसके फलस्वरूप तीनों बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुज के क्षेत्रफल का मान शून्य होगा।

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

शेखावाटी मिशन - 100

सक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ एवं $R_3 \to R_3 - R_1$ से

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ x-1 & y-2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore C_3$ के अनुसार प्रसार करने पर

$$\frac{1}{2}\left[1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x-1 & y-2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x-1 & y-2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right] = 0$$

$\Rightarrow 2(y-2) - 4(x-1) = 0$ $\qquad\qquad \Rightarrow 2y - \cancel{4} - 4x + \cancel{4} = 0$

$\Rightarrow 2y - 4x = 0$ $\qquad\qquad \Rightarrow 2y = 4x$

$\Rightarrow \boxed{y = 2x}$ जो कि रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

7. यदि शीर्ष (2, –6), (5, 4) एवं (k, 4) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो, तो k का मान ज्ञात किजिए–

Sol. शीर्ष (2, –6), (5, 4) एवं (k, 4) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ k & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta = \frac{1}{2}\left[2(4-4) + 6(5-k) + 1(20-4k)\right]$ $\qquad$ [$\therefore R_1$ के अनुसार प्रसार करने पर]

$\Delta = \frac{1}{2}\left[2.0 + 30 - 6k + 20 - 4k\right]$

$\Delta = \frac{1}{2}\left[50 - 10k\right] = 25 - 5k$........................(1)

परन्तु प्रश्नानुसार त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई है

अतः $\Delta = \pm 35$ $\qquad\qquad 25 - 5k = \pm 35$

($\therefore$ +, लेने पर) $25 - 5k = 35$ $\qquad\qquad \Rightarrow -5k = 35 - 25$

$\Rightarrow -5k = 10$ $\qquad\qquad \Rightarrow \boxed{k = -2}$

($\therefore$ –, लेने पर) $25 - 5k = -35$ $\qquad\qquad \Rightarrow -5k = -35 - 25$

$\Rightarrow -5k = -60$ $\qquad\qquad \Rightarrow \boxed{k = 12}$

अतः $\boxed{k = -2 \text{ or } 12}$

8. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों के उपसारणिक व सहखंण्ड ज्ञात कीजिए–

Sol. अवयव aij का उपसारणिक Mij

यहाँ $a_{11} = 1$ इसलिए $\qquad M_{11} = a_{11}$ का उपसारणिक = 3

$M_{12} = a_{12}$ का उपसारणिक = 4

$M_{21} = a_{21}$ का उपसारणिक = – 2

$M_{22} = a_{22}$ का उपसारणिक = 1

अब aij का सहगुणनखण्ड Aij है इसलिए उपसारणिक एवं सहगुणनखण्ड में निम्न संबंध होता है

शेखावाटी मिशन - 100

$Aij = (-1)^{i+j} Mij$

अतः $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2(3) = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (4) = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$

9. दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहगुणखण्डों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए-

Sol. माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

दूसरी पंक्ति के सहगुणनखण्ड

$2(2 = a_{21})$ का सहगुणनखण्ड (A_{21})

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$ जहाँ M_{21}, $(2 = a_{21})$ का उपसारणिक है

$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9-16) = -(-7) = 7$

$0(0 = a_{22})$ का सहगुणनखंण्ड (A_{22})

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (15-8) = 7$

$1(1 = a_{23})$ का सहगुणनखण्ड A_{23}

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}$

$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10-3) = -7$

अतः दूसरी पंक्ति (R_2) के अनुदिश सारणिक का प्रसार करने पर

$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

$= 2 \times (7) + 0\ (7) + 1\ (-7)$

$= 14 + 0 - 7 = 7$

10. आव्युह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखण्डन (Adjoint) ज्ञात कीजिए-

Sol. माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ [जहाँ Mij अवयव aij का उपसारणिक]

यदि A में aij का सहगुणनखण्ड Aij हो, तो

$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2\ |4| = 4$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\ M_{12} = (-1)^3(3) = -3$

$A_{21}\ (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3|2| = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4|1| = 1$

A के अवयवों का सहगुणनखंण्ड आव्युह

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ adj (A) = B का परिवर्त आव्युह

$$\Rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $\Rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

सारणिक (भाग-ब)

1. यदि x, y, z विभिन्न हो और $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ हो तो दर्शाइए कि 1 + xyz = 0

दिया गया है कि $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$

Sol. दिया गया है कि $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

प्रथम सारणिक में $C_3 \leftrightarrow C_2$ और तब $C_1 \leftrightarrow C_2$ के प्रयोग द्वारा और दूसरी सारणिक में R_1 में से x, R_2 में से y एवं R_3 में से z उभयनिष्ठ लेने पर

$$\Delta = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}(1+xyz)$$

अब $R_2 \to R_2 - R_1$ और $R_3 \to R_3 - R_1$ का प्रयोग द्वारा

$$\Delta = (1+xyz)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ R_2 से (y – x) एवं R_3 से (z – x) उभयनिष्ठ लेने पर

$$\Delta = (1+xyz)(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix}$$

C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

शेखावाटी मिशन – 100

$$\Delta = (1+xyz)(y-x)(z-x)\left[1(z+x-y-x) - 0\left(zx+x^2-x^2\right) + 0\left(xy+x^2-x^2\right)\right]$$

$= (1+xyz)(y-x)(z-x)(z-x)$ $\qquad = (1+xyz)(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore \Delta = 0$ और x, y, z सभी भिन्न है अतः

$\therefore x \neq y, y \neq z, z \neq x$ $\qquad \Rightarrow \Delta = 0$

if $\boxed{1+xyz=0}$

2. बिना प्रसार किए सिद्ध कीजिए $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

Sol. माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ $\qquad$ सक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ एवं $R_3 \to R_3 - R_1$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$ $\qquad \therefore$ R_2 से (b – a) एवं R_3 से (c – a)उभयनिष्ठ लेने पर

$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$

प्रथम स्तम्भ के अनुसार सारणिक का प्रयत्न करने पर

$$\Delta = (b-a)(c-a)\left[1\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & c+a \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & b+a \end{vmatrix}\right]$$

$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a)$ $\qquad = (b-a)(c-a)(c-b)$

$\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$ R.H.S

3. बिना प्रसार किए व सारणिक के गुणधर्मी का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} b+c & a+r & y+2 \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

Sol. माना $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a+r & y+2 \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$ $\qquad$ संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c+c+a+a+b & q+r+r+p+q+p & y+z+z+x+x+y \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$$

शैक्षिक मिशन - 100

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(p+q+r) & 2(x+y+2) \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$$

R_1 से 2 उभयनिष्ठ लेने पर

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & p+q+r & x+y+2 \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$$

सक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ एवं $R_3 \to R_3 - R_1$

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} a+b+c & p+q+r & x+y+2 \\ -b & -q & -y \\ -c & -r & -z \end{vmatrix}$$

अब $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ सक्रिया से

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ -b & -q & -y \\ -c & -r & -z \end{vmatrix}$$

$\therefore$ R_2 एवं R_3 से (–1) उभयनिष्ठ लेने पर

$$\Delta = 2(-1)(-1)\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = \text{R.H.S}$$

4. सारणिक का प्रसरन किए बिना सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

Sol. माना $\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

सक्रियाओं $R_1 \to aR_1, R_2 \to bR_2$ तथा $R_3 \to cR_3$ और सारणिक को abc से भाग देने पर

$$\Delta = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & abc \\ b^2 & b^3 & abc \\ c^2 & c^3 & abc \end{vmatrix}$$

$\therefore$ c_3 से abc उभयनिष्ठ लेने पर

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}$$

स्तम्भ $C_1 \leftrightarrow C_3$ और बाद में $C_3 \leftrightarrow C_2$ करने पर

$$\Delta = (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

शेखावाटी मिशन - 100

अतः $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ इतिसिद्धम्

5. निम्न समीकरण निकाय का हल आव्युह सिद्धांन्त की सहायता से कीजिए-

$2x + 5y = 1$

$3x + 2y = 7$

Sol. समीकरण निकाय को $Ax = B$ के रूप में लिखा जा सकता है:-

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

अब $|A| = 2 \times 2 - 5 \times 3 = 4 - 15 = -11 \neq 0$

अतः A व्युत्क्रमणीय आव्युह है इसलिए इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है और इसका एक अद्वितीय हल है।

A के सहगुणनखण्ड निम्न है

$A_{11} = (-1)^{1+1}(2) = 2,$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}(5) = -5$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(3) = -3,$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}(2) = 2$

A के सहगुणनखण्डों से निर्मित आव्युह $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ adj (A) = B का परिवर्त आव्युह $= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

अतः $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore |A| \neq 0 \quad Ax = B$ $\quad \therefore A^{-1}.A = I$

$(A^{-1}.A)x = A^{-1}B$ $\quad \Rightarrow I.x = A^{-1}.B$

$\Rightarrow x = A^{-1}.B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\quad \Rightarrow x = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

अतः $\boxed{x = 3, y = -1}$

6. समीकरण निकाय को आव्युह विधि से हल कीजिए-

$5x + 2y = 3$

$3x + 2y = 5$

Sol. प्रश्नानुसार $\quad 5x + 2y = 3$

$\quad 3x + 2y = 5$

इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$Ax = B$..........................(1)

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad$ आव्युह का सारणिक |A|

शेखावाटी मिशन - 100

$$|A| = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 10 - 6 = 4 \neq 0$$

अत: आव्युह A व्युत्त्क्रमणीय है अर्थात् A^{-1} का अस्तित्व है और समीकरण निकाय संगत है।

यदि A में adj का सहगुणनखंण्ड aij हो तो

$A_{11} = (-1)^{1+1}(2) = 2,$ $A_{12} = (-1)^{2+1}(3) = -3$

$A_{21} = (-1)^{2+1}(2) = -2,$ $A_{22} = (-1)^{2+2}(5) = 5$

A अवयवों का सहगुणनखंण्ड आव्युह

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A का सहखण्डज आव्युह (adj. A) = B^1

$$\therefore adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

अब $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

समीकरण (1) से, $x = A^{-1}.B]$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \times 3 & + & (-2) \times 5 \\ -3 \times 3 & + & 5 \times 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 - 10 \\ -9 + 25 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/4 \\ 16/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

अत: $\boxed{x = -1,\ y = 4}$

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A.adj(A) = |A|.I$ और A^{-1} ज्ञात कीजिए–

Sol. हम पाते है कि $|A| = 1(16 - 9) - 3(4 - 3) + 3(3 - 4) = 1 \neq 0$

अब A के सहगुणनखण्ड निम्न है–

$A_{11} = 7,$ $A_{12} = -1,$ $A_{13} = -1,$ $A_{21} = -3,$ $A_{22} = 1$

$A_{23} = 0,$ $A_{31} = -3,$ $A_{32} = 0,$ $A_{33} = 1$

A के सहगुणनखंण्डों से निर्मित आव्युह $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

अब adj (A) = B का परिवर्त आव्युह $= \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

शेखावाटी मिशन - 100

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

अब $A.\left[adj(A)\right]=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

$$A.(adjA)=\begin{bmatrix}7-3-3&-3+3+0&-3+0+3\\7-4-3&-3+4+0&-3+0+3\\7-3-4&-3+3+0&-3+0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=(1)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=|A|.I$$

और $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(adj.A)=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ $\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

8. प्रदर्शित कीजिए कि आव्युह $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$ समीकरण $A^2-4A+I=0$, जहाँ 2×2 कोटि का शून्य आव्युह है और I, 2×2 कोटि का तत्समक आव्युह है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए–

Sol. हम जानते है कि $A^2=A.A=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix}4+3&6+6\\2+2&3+4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&12\\4&7\end{bmatrix}$

अतः $A^2-4A+I=\begin{bmatrix}7&12\\4&7\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}7&12\\4&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8&12\\4&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

तथा $|A|=\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=4-3=1\neq0$, A^{-1} अस्तित्व है।

अतः $A^2-4A+I=0$

$\Rightarrow A.A-4A=-I$

$\therefore$ A^{-1} से गुणन करवाने पर

$\Rightarrow A^{-1}A.A-4A^{-1}.A=-A^{-1}.I$

$\therefore A^{-1}.A=I$

$\Rightarrow I.A-4I=-A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1}=4I-A=4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$

अतः $\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}$

9. आव्युह $A=\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}$ के लिए a एवं b ऐसे संख्याए ज्ञात कीजिए ताकि $A^2+a.A+b.I=0$ हो।

Sol. दिया गया आव्युह $A=\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}$

अतः $A^2=A.A=\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&8\\4&3\end{bmatrix}$

$\therefore$ प्रश्नानुसार $A^2+a.A+b.I=0$

अतः $\begin{bmatrix}11&8\\4&3\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

शेखावाटी मिशन – 100

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a & 2a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a+0 \\ 4+a+0 & 3+a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

संगत अवयवों की तुलना करने पर

$11 + 3a + b = 0$ ....(1)

$8 + 2a = 0$ ....(2)

$4 + a = 0$ ....(3)

$3 + a + b = 0$ ....(4)

समीकरण (2) एवं (3) से स्पष्ट है कि $a + 4 = 0$ $\Rightarrow a = -4$

$a = -4$ का मान समीकरण (4) में रखने पर $3 - 4 + b = 0$

$-1 + b = 0$ $\Rightarrow b = 1$

अतः $\boxed{a = -4, \quad b = 1}$

10. आव्युहों के गुणनफल $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए, जहां

$x - y + 2z = 1$ $2y - 3z = 1$ $3x - 2y + 4z = 2$

Sol. माना $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ है, तो समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$Ax = c$ जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ एवं $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

अब $A.B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix}$

$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ अतः $A.B = I$

अतः A एवं B एक दूसरे का व्युत्क्रम आव्युह है।

इसलिए $A^{-1}A.B = A^{-1}.I$ $\therefore A^{-1}A = I$

$B = A^{-1}$ का उपयोग करते है। $\therefore Ax = c$

$\Rightarrow A^{-1}.Ax = A^{-1}c$ $\therefore A^{-1}.B$

$\Rightarrow I.x = B.c$

$= x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ अतः $\boxed{x = 0, y = 5, z = 3}$

शिक्षावाणी मिशन – 100

कक्षा - 12 (Maths)

सांत्यता एवं अवकलनीयता

अध्याय - 05

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. यदि $f(x)=\begin{cases} x+k & , x<3 \\ 4 & , x=3 \\ 3x-5, & x>3 \end{cases}$ x = 3 पर संतत हो, तो k का मान होगा–

(1) 4 (2) 3 (3) 2 **(4)** 1

Ans. फलन f(x), x = 3 पर संतत है अत:

$$f(3)=\lim_{x\to 3-0} f(x)$$

$$\Rightarrow 4=\lim_{h\to 0}[(3-h)+k]$$

$$\Rightarrow 4=3+k \Rightarrow k=1$$

2. फलन f(x) = [x] असंतत है–

(1) प्रत्येक वास्तविक संख्या पर (2) प्रत्येक परिमेय संख्या पर

(3) प्रत्येक पूर्णांक पर (4) प्रत्येक अपरिमेय संख्या पर

3. यदि $y=\cos(\sqrt{x})$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा–

(1) $-\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ (2) $-\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ (3) $\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ (4) $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

4. यदि $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा–

(1) $\frac{2}{1+x^2}$ **(2)** $-\frac{2}{1+x^2}$ (3) $\frac{1}{1+x^2}$ (4) $-\frac{1}{1+x^2}$

5. यदि x = a cos θ , y = b sin θ है तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा–

(1) $\frac{b}{a}\cot\theta$ (2) $\frac{-b}{a}\tan\theta$ (3) $+\frac{b}{a}\tan\theta$ **(4)** $-\frac{b}{a}\cot\theta$

6. यदि y = log x हो तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा–

(1) $\frac{1}{x^2}$ (2) $-\frac{1}{x}$ **(3)** $-\frac{1}{x^2}$ (4) $-\frac{1}{x^3}$

रिक्त स्थानों की पूर्ति करो

7. फलन f(x) = |(x – 3)|, x ∈ R, x के मान .... पर अवकलनीय नहीं है।

Ans. x = 3 पर f(x) = |(x – 3)| अवकलनीय फलन नहीं होता है।

शेखावाटी मिशन - 100

8. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right]$ = ... हैं।

Ans. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} \times e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$

9. $\frac{d}{da}(a^{x})$ = ... हैं।

Ans. $\frac{d}{da}(a^{x}) = xa^{x-1}$

10. यदि $x = 4t$, $y = \frac{4}{t}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ = ... हैं।

Ans. $\frac{dx}{dt} = 4, \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{t^2}$ तब $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{4}{t^2}}{4} = -\frac{1}{t^2}$

11. यदि $y = \tan^{-1}x$ है तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ = ... हैं।

Ans. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \times 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

12. $2x + 3y = \sin x$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

Ans. $2x + 3y = \sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos x$$

या $3\frac{dy}{dx} = \cos x - 2$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2}{3}$

13. x^x का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

Ans. माना कि $y = x^x$

दोनों पक्षों का लघुगुणक लेने पर

$\log y = \log x^x$

या $\log y = x \log x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \log x.1$$

शेखावाटी मिशन – 100

या $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \log x$

या $\frac{dy}{dx} = y(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$

14. $e^{\sec^2 x}$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{d}{dx}(e^{\sec^2 x}) = e^{\sec^2 x}\frac{d}{dx}(\sec^2 x)$

$$= e^{\sec^2 x}.2\sec x \frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$= 2\sec^2 x \tan x.e^{\sec^2 x}$$

15. $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

Ans. माना कि $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right]$$

या $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right]$

या $y = \tan^{-1}\left[\tan\frac{x}{2}\right]$

या $y = \frac{x}{2}$ x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

लघुत्तरात्मक प्रश्न

16. फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

तब x = 0 पर f(x) के सांत्यता का परीक्षण कीजिए।

Ans. फलन f(x) को मापांक रहित रूप में लिखने पर

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x} = -1, & \text{यदि } x < 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ \frac{x}{x} = 1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

x = 0 पर फलन $f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

ओलम्पियाड मिशन – 100

x = 0 पर बाँयी सीमा : x < 0 पर फलन f(x) = –1

$f(0-0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$

$= \lim_{h \to 0} (-1) = -1$

x = 0 पर दाँयी सीमा : x > 0 पर फलन f(x) = 1

$f(0+0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} (1) = 1$

$\therefore\ f(0) \neq f(0-0) \neq f(0+0)$

अत: f(x), x = 0 पर असंतत है।

17. a तथा b के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि

$$f(x) = \begin{cases} 5 & ,\ \text{यदि } x \le 2 \\ ax + b & ,\ \text{यदि } 2 < x < 10 \\ 21 & ,\ \text{यदि } x \ge 10 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन हो।

Ans. दिया है फलन f(x) संतत है इसलिए x = 2 व x = 10 पर भी संतत है।

x = 2 पर बाँयी सीमा = x = 2 पर दाँयी सीमा

$\lim_{h \to 0} f(2-h) = \lim_{h \to 0} f(2+h)$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0}(5) = \lim_{h \to 0}[a(2+h)+b]$

$\Rightarrow\ 5 = a(2+0) + b$ या $2a + b = 5$ .... (1)

x = 10 पर बाँयी सीमा = x = 10 पर दाँयी सीमा

$\lim_{h \to 0} f(10-h) = \lim_{h \to 0} f(10+h)$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} a(10-h) + b = \lim_{h \to 0} 21$

$\Rightarrow\ a(10-0) + b = 21$

$\Rightarrow\ 10a + b = 21$ .... (2)

समीकरण (2) से समीकरण (1) को घटाने पर 8a = 16 या a = 2

a = 2 समीकरण (1) में रखने पर 2(2) + b = 5 या b = 5 – 4 = 1

अत: a = 2, b = 1

18. यदि $\sin^2 y + \cos xy = k$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया फलन $\sin^2 y + \cos xy = k$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2\sin y \frac{d}{dx}(\sin y) - \sin xy \frac{d}{dx}(xy) = 0$$

या $2\sin y \cos y \frac{dy}{dx} - \sin xy \left[x.\frac{dy}{dx} + y.1\right] = 0$

या $\sin 2y \frac{dy}{dx} - x \sin xy \frac{dy}{dx} - y \sin xy = 0$

या $\frac{dy}{dx}\left[\sin 2y - x\sin xy\right] = y\sin xy$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin xy}{\sin 2y - x\sin xy}$

19. यदि $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$; y = a sint है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{dx}{dt} = a\left(-\sin t + \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2}\right)$

$$= a\left(-\sin t + \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \times \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)$$

$$= a\left(-\sin t + \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right)$$

$$= \left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = a\left(\frac{-\sin^2 t + 1}{\sin t}\right) = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}$$

तथा $\frac{dy}{dt} = a\cos t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t \times \sin t}{a\cos^2 t} = \tan t$$

20. यदि y = 3 cos(log x) + 4 sin(logx) है, तो दर्शाइए कि $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

Ans. दिया है y = 3 cos(logx) + 4 sin(logx) ..... (1)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = -3\sin(\log x).\frac{1}{x} + 4\cos(\log x).\frac{1}{x}$$

या $xy_1 = -3\sin(\log x) + 4\cos(\log x)$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$xy_2 + y_1.1 = -\frac{3}{x}\cos(\log x) - \frac{4}{x}\sin(\log x)$$

या $x^2y_2 + xy_1 = -\{3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)\}$

समीकरण (1) से

$x^2y_2 + xy_1 = -y$

या $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

21. फलन $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए :

Ans. मानाकि $y = x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

पुनः मानाकि $x^{\sin x} = u$ तथा $(\sin x)^{\cos x} = v$

तब $y = u + v$

x के सापेक्ष अवकलन से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{....} \quad (1)$$

$u = x^{\sin x}$

लघुगुणक लेने पर

$\log u = \log x^{\sin x}$

या $\log u = \sin x \,.\, \log x$

x के सापेक्ष अवकलन से

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \sin x.\frac{1}{x} + \log x.\cos x$$

$$\frac{du}{dx} = u\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x.\log x\right]$$

$$\frac{du}{dx} = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x.\log x\right)$$

$v = (\sin x)^{\cos x}$

लघुगुणक लेने पर

$\log v = \log(\sin x)^{\cos x}$

$\log v = \cos x \log(\sin x)$

x के सापेक्ष अवकलन से

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \cos x.\frac{\cos x}{\sin x} - \sin x \log(\sin x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x.\log(\sin x)\right]$$

$$\frac{dv}{dx} = (\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log(\sin x)\right]$$

समीकरण (1) से

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x.\log x\right] + (\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x\right]$$

22. यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{(1+y)} + y\sqrt{(1+x)} = 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

Ans. दिया फलन $x\sqrt{(1+y)} + y\sqrt{(1+x)} = 0$ ..... (1)

या $x\sqrt{(1+y)} = -y\sqrt{(1+x)}$

वर्ग करने पर

$x^2(1+y) = y^2(1+x)$

$x^2 + x^2y = y^2 + xy^2$

या $x^2 - y^2 + x^2y - xy^2 = 0$

या $(x+y)(x-y) + xy(x-y) = 0$

या $(x-y)(x+y+xy) = 0$

$\therefore$ $x - y = 0$ अर्थात् $x = y$ समीकरण (1) को संतुष्ट नहीं करता है इसलिए $x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0$ तो

$x + y + xy = 0$

शेखावाटी मिशन - 100

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

या $y(x+1) = -x$

या $y = -\frac{x}{x+1}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(-x) - (-x)\frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(-1) + x(1)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

अतः $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

23. फलन $y = x^2 + 2$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए जब $a = -2$ तथा $b = 2$ हैं।

Ans. फलन $f(x) = y = x^2 + 2$, अंतराल $[-2, 2]$

फलन x में बहुपदीय फलन है ऐसे फलन सर्वत्र संतत व अवकलनीय होते हैं इसलिए

(i) सवृत अंतराल $[-2, 2]$ में फलन संतत है तथा

(ii) विवृत अंतराल $(-2, 2)$ में अवकलनीय फलन है

(iii) $f(-2) = (-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$, $f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$

साथ ही $f(-2) = f(2) = 6$ हैं तो रोले प्रमेय सत्यापित प्रमेयानुसार एक बिन्दु $c \in (-2, 2)$ का अस्तित्व होगा, जहां $f'(c) = 0$ हैं चूंकि $f'(x) = 2x$ है इसलिए $x = c$ पर $f'(c) = 0$ और $c = 0 \in (-2, 2)$

शेखावाटी मिशन - 100

कक्षा - 12 (Maths)

(समाकलन)

अध्याय - 07

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ का मान है–

(a) $\tan^{-1}(e^x) + c$ (b) $\tan^{-1}(e^{-x}) + c$ (c) $\log(e^x + e^{-x}) + c$ (d) $\log(ex - e^{-x}) + c$

Ans. [a]

Sol. $I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ $= \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$

माना की $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$I = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt$ $\left\{ \because \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c \right\}$

$= \tan^{-1} t + c$ $= \tan^{-1}(ex) + c$

2. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ का मान होगा

(a) $\tan x + \cot{-x} + c$ (b) $\tan x + \text{cosec } x + c$

(c) $-\tan x + \cot{-x} + c$ (d) $\tan + \sec x + c$

Ans. [a]

Sol. $I = \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$= \int \left\{ \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right\} dx = \int (\sec^2 x - \text{cosec}^2 x) dx$

$= \tan x + \cot x + c$

3. $\int \frac{dx}{x^2 + 16}$ का मान है–

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$ (b) $\frac{1}{4} \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$ (c) $\cot^{-1}(x) + c$ (d) $\frac{1}{4} \cot^{-1}(x) + c$

Ans. [b]

Sol. $I = \int \frac{dx}{x^2 + 16} = \int \frac{dx}{x^2 + 4^2}$

$\because \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ $I = \frac{1}{4} \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$

4. $\int \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\theta$ का मान है–

(a) $\tan\theta+\cot\theta+c$

(b) $\tan\theta-\cot\theta+c$

(c) $\tan_2\theta+\cot\theta+c$

(d) $\tan\theta-\cot_2\theta+c$

Ans. [b]

Sol. $\because I=\int\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}d\theta$

अंश व हर को $\cos^4\theta$ से भाग देने पर

$$I=\int\frac{\frac{1}{\cos^4\theta}}{\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}d\theta$$

$$=\int\frac{\sec^4\theta}{\tan^2\theta}d\theta=\int\frac{\sec^2\theta.\sec^2\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$

$$=\int\frac{\left(1+\tan^2\theta\right)\sec^2\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$

माना $\tan\theta=t\Rightarrow\sec^2\theta\,d\theta=dt$

$$I=\int\frac{\left(1+t^2\right)}{t^2}dt=\int\left(t^{-2}+1\right)dt=\frac{t^{-2}+1}{-2+1}+t+c$$

$$=\frac{-1}{t}+t+c \qquad =\frac{-1}{\tan\theta}+\tan\theta+c \qquad =-\cot\theta+\tan\theta+c$$

5. $\int e\left(\tan\theta+\sec^2\theta\right)d\theta$ का मान होगा–

(a) $e^\theta\tan\theta+c$

(b) $e^\theta\sec^2\theta+c$

(c) $e^\theta\sec\theta+c$

(d) इनमें से कोई नहीं

Ans. [a]

Sol. $I=\int e^\theta\left(\tan\theta+\sec^2\theta\right)d\theta$

$\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=e^xf(x)+c$

$\because I=\int e^\theta\left(\tan\theta+\sec^2\theta\right)d\theta$

$f(\theta)=\tan\theta\Rightarrow f'(\theta)=\sec^2\theta\,d\theta$

$I=\int e^\theta\left(\tan\theta+\sec^2\theta\right)d\theta=e^\theta\tan\theta+c$

6. $\int\frac{(1+\log x)^2}{x}dx$ का मान होगा–

(a) $(1+\log x)^2$

(b) $\frac{(1+\log x)^3}{3}$

(c) $(1+\log x)^3$

(d) इनमें से कोई नहीं

Ans. [b]

Sol. $\because I=\int\frac{(1+\log x)^2}{x}dx$

माना कि $1+\log x=t\Rightarrow\frac{1}{x}dx=dt$

ओखावाटी मिशन – 100

$$I=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+c=\frac{1}{3}(1+\log x)^3+c$$

7. $\int \sin^2 x dx$ का मान होगा–

(a) $\frac{1}{2}\left(x-\sin^2 x\right)+c$ (b) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin^2 x}{2}\right)+c$ (c) $2\sin x\cos x+c$ (d) $\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin^2 x}{2}\right]+c$

Ans. [b]

Sol. $I=\int \sin^2 x dx$

$$=\int\left(\frac{1-\cos^2 x}{2}\right)dx \qquad \begin{cases}\because \cos^2 x=1-\sin^2 x\\ \therefore \sin^2 x=\dfrac{1-\cos^2 x}{2}\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left\{1-\cos^2 x\right\}dx \qquad =\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin^2 x}{2}\right]+c$$

8. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का प्रतिअवकलज है–

(a) $\frac{1}{3}x^{1/3}+2x^{1/2}+c$ (b) $\frac{2}{3}x^{2/3}+\frac{1}{2}x^2+c$ (c) $\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+c$ (d) $\frac{3}{2}x^{3/2}+\frac{1}{2}x^{1/2}+c$

Ans. [c]

Sol. $\because I=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$$=\int\left(x^{1/2}+x^{-1/2}\right)dx=\left[\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}+\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]+c$$

$$=\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+c$$

9. यदि $\frac{d}{dx}f(x)=4x^3-\frac{3}{x^4}$ जिसमें $f(2)=0$ तो $f(x)$ है–

(a) $x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{129}{8}$ (b) $x^3+\frac{1}{x^4}+\frac{129}{8}$ (c) $x^4+\frac{1}{x^3}+\frac{129}{8}$ (d) $x^3+\frac{1}{x^4}-\frac{129}{8}$

Ans. [a]

Sol. $\frac{d}{dx}f(x)=4x^3-\frac{3}{x^4}$

$$f(x)=\int\left(4x^3-\frac{3}{x^4}\right)dx$$

$$=4.\frac{x^4}{4}-3\frac{x^{-3}}{(-3)}+c$$

$$f(x)=x^4+\frac{1}{x^3}+c$$

$\because x=2$ पर $f(2)=0$

$$\therefore f(2)=8 \quad 2^4+\frac{1}{2^3}+c$$

$$0=16+\frac{1}{8}+c\Rightarrow c=\frac{129}{8}$$

$\therefore f(x) = x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$

10. $\int \log x \, dx$ का मान होगा–

(a) $x \log x + x + c$ (b) $x \log x - x + c$ (c) $\log x + x + c$ (d) इनमें से कोई नहीं

Ans. [b]

Sol. $I = \int \log x \; dx$

$= \log x \int 1.dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\log x) \int 1.dx \right\} dx$

$= x \log x - \int \frac{1}{x}.x \, dx$ [$\therefore$ log x को प्रथम फलन व T को द्वितीय फलन मानकर खंडशः समा. करने पर]

$= x \log x - x + c$

11. $\int x^2 e^{x^3} dx$ बराबर है–

(a) $\frac{1}{3} e^{x^3} + c$ (b) $\frac{1}{3} e^{x^2} + c$ (c) $\frac{1}{2} e^{x^3} + c$ (d) $\frac{1}{2} e^{x^2} + c$

Ans. [a]

Sol. $I = \int x^2 e^{x^3} dx$

माना $x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} dt$

$I = \frac{1}{3} \int e^t dt$ $= \frac{1}{3} e^t + c = \frac{1}{3} e^{x^3} + c$

12. $\int \sqrt{1 + x^2} dx$ बराबर है–

(a) $\frac{x}{2} \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \log \left| \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \right| + c$ (b) $\frac{2}{3} (1 + x^2)^{3/2} + c$

(c) $\frac{2}{3} x (1 + x^2)^{3/2} + c$ (d) $\frac{x^2}{2} \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} x^2 \log \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| + c$

Ans. [a]

Sol. $\therefore \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$

$\therefore \int \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| + c$

13. $\int_2^3 \frac{1}{x} dx$ का मान होगा–

(a) $\log 2/3$ (b) $\log 3/2$ (c) $\log 3 + \log 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

Ans. [b]

Sol. $I = \int_2^3 \frac{1}{x} dx$

$$= [\log x]_2^3 = \log 3 - \log 2 = \log \frac{3}{2}$$

14. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ बराबर है–

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{12}$

Ans. [d]

Sol. $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

$= \left[\tan^{-1} x\right]_1^{\sqrt{3}}$ $\left\{\because \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right\}$

$= \tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1} 1$ $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

15. $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ का मान होगा–

(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) इनमें से कोई नहीं

Ans. [a]

Sol. $I = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$

माना की $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$

$f(-x) = [\sin(-x)]^5 [\cos(-x)]^4$

$= -\sin^5 x \cos^4 x = -f(x)$

$\therefore f$ एक विषम फलन है

$I = 0$

16. $\int \frac{\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)} dx$ बराबर है–

(a) $\frac{-1}{\sin x + \cos x} + c$ (b) $\log|\sin x + \cos x| + c$

(c) $\log|\sin x - \cos x| + c$ (d) $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} + c$

Ans. [b]

Sol. $I = \int \frac{\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$

$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$

$= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x + \cos x)^x} dx$ $= \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

माना $\cos x + \sin x = t$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x) dx = dt$

शेखावाटी मिशन – 100

$I=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+c$ $\qquad\qquad =\log|\cos x+\sin x|+c$

17. यदि $f(a+b-x)=f(x)$ तो $\int_a^b xf(x)dx$ बराबर है–

(a) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(a+b-x)dx$ (b) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)dx$

(c) $-\frac{a}{2}\int_a^b f(x)dx$ (d) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

Ans. [d]

Sol. $I=\int_a^b xf(x)dx$............(i)

p_4 गुणधर्म से

$I=\int_a^b (a+b-x)f(a+b-x)dx$...........(ii)

$\because f(a+b-x)=f(x)$

$I=\int_a^b (a+b-x)f(x)dx$..........(2)

समी. (1) + समी. (2)

$2I=\int_a^b xf(x)+\int_a^b (a+b-x)f(x)dx$

$\Rightarrow 2I=\int_a^b \{x+a+b-x\}f(x)dx$

$\Rightarrow 2I=\int_a^b (a+b)f(x)dx$

$\Rightarrow I=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

18. $\int\frac{1}{x+x\log x}dx$ का मान होगा–

(a) $\log|1+\log x|+c$ (b) $\log|1-\log x|+c$

(c) $\frac{1}{2}\log|1+\log x|+c$ (d) $\frac{1}{x}\log|1+\log x|+c$

Ans. [a]

Sol. $I=\int\frac{1}{x+x\log x}=\int\frac{1}{x(1+\log x)}dx$

माना कि $1+\log x=t\Rightarrow\frac{1}{x}dx=dt$

$I=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+c$ $\qquad\Rightarrow I=\log|1+\log x|+c$

19. $\int\frac{\sin}{(1+\cos x)^2}dx$ का मान है–

(a) $\frac{1}{1-\cos x}+c$ (b) $\frac{2}{1-\cos x}+c$ (c) $\frac{1}{(1+\cos x)^2}+c$ (d) $\frac{1}{1+\cos x}+c$

Ans. [d]

ज्ञानवाटी मिशन – 100

Sol. $I = \int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx$

माना कि $1+\cos x = t \Rightarrow -\sin dx = dt$

$\Rightarrow I = \int -\frac{dt}{t^2} = -\frac{t^{-2+1}}{(-2+1)} + c$ $= \frac{1}{t} + c = \frac{1}{(1+\cos x)} + c$

20. $\int \sin^{-1}(\cos x) dx$ का मान है–

(a) $\frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{2} + c$ (b) $\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} + c$ (c) $-\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} + c$ (d) $-\frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{2} + c$

Ans. [b]

Sol. $I = \int \sin^{-1}(\cos x) dx$ $= \int \sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] dx$

$= \int \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ $= \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} + c$

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(a) $\int \frac{1}{x^2-4} dx =$ ______________ होगा।

(b) $\int \frac{e^{2x}-1}{d^{2x}+1} dx =$ ______________ होगा।

(c) $\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx =$ ______________ होगा।

(d) $\int_{-1}^{1} (x+1) dx =$ ______________ होगा।

(e) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx =$ का मान ______________ होगा।

(f) $\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2} dx$ का मान ______________ होगा।

(g) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^5 x dx$ का मान ______________ होगा।

(h) $\int \frac{dx}{x^2+16}$ का प्रतिअवकलज ______________ है।

(i) $\int_2^3 3^x dx$ का मान ______________ है।

(j) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ का मान ______________ है

अतिलघुतरात्मक प्रश्न

1. $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$ ज्ञात कीजिए–

Sol. $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

ओमप्रकाशी मिशन – 100

$= \int \sec^2 x\,dx - \int \tan x \sec x\,dx$

$= \tan x - \sec x + c$

2. $\int \left(2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right)dx$ ज्ञात कीजिए–

Sol. $I = \int \left(2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right)dx$

$= 2\int x^2 dx - 3\int \sin x\,dx + 5\int \sqrt{x}\,dx$

$= \dfrac{2.x^2}{3} + 3\cos x + 5 \times \dfrac{2}{3} x^{3/2} + c$

$= \dfrac{2}{3} x^3 + 3\cos x + \dfrac{10}{3} x^{3/2} + c$

3. $\int \dfrac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$ ज्ञात कीजिए–

Sol. $I = \int \dfrac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$

माना कि $\tan^{-1} x = t$

$\dfrac{1}{1+x^2} dx = dt$ $\qquad I = \int e^t dt = e^t + c$ $\qquad = e^{\tan^{-1} x} + c$

4. $\int \sin x \sin(\cos x) dx$ को हल कीजिए–

Sol. $I = \int \sin x \sin(\cos) dx$

$\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt \Rightarrow \sin x\,dx = -dt$

$= -\int \sin t\,dt$ $\qquad = \cos t + c$

$= \cos(\cos x) + c$

5. $\int a^x da$ का मान होगा–

Sol. $I = \int a^x da = \dfrac{a^{x+1}}{x+1} + c$

6. $\int \left(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x\right)dx$ का मान होगा–

Sol. $I = \int \left(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x\right)dx$

$\because \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad = \int \dfrac{\pi}{2}.dx$ $\qquad I = \dfrac{\pi}{2} x + c$

7. $\int \sin^3 x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए–

Sol. $I = \int \sin^3 x\,dx$

$\because \sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$

$\therefore I = \int \left(\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right)dx$

शेखावाटी मिशन – 100

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + c$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx$ को हल कीजिए–

Sol. $I = \int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}$

$x - 1 = t$ रखने पर $dn = dt$

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \sin^{-1}(t) + c$

$= \sin^{-1}(x - 1) + c$

9. $\int \frac{1}{x(x^n + 1)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए–

Sol. $I = \int \frac{1}{x(x^n + 1)} dx$

अंश व हर को x^{n-1} से गुना करके $x^n = t$ रखने पर

$= \int \frac{x^{n-1}}{x^n (x^n + 1)} dx$

$\because x^n = t \Rightarrow nx^{n-1}dx = dt \Rightarrow x^{n-1}dx = \frac{1}{n}dt$

$I = \frac{1}{n}\int \frac{1}{t(t+1)} dt$

$= \frac{1}{n}\int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right] dt$

$= \frac{1}{n}\left[\log t - \log(t+1)\right] + c$

$= \frac{1}{n}\log\frac{t}{t+1} + c$

$= \frac{1}{n}\log\frac{x^n}{x^n + 1} + c$

10. $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$ का मान ज्ञात कीजिए–

Sol. $I = \int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \int \frac{1}{x^2 - 3^2} dx$

$= \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$

10. $\int xe^x \, dx$ ज्ञात कीजिए–

Sol. $I = \int \underset{I}{x} \underset{II}{e^x} \, dx$

$x\int e^x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\right\} dx$

शेखावाटी मिशन – 100

$= xe^x - \int e^x dx \qquad I = xe^x - e^x + c$

11. $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$ को हल कीजिए-

Sol. $I = \int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

$= e^x \times \frac{1}{x} + c \quad \{\because \int e^x 1(x) + 1^1(x)\} dx = e^x f(x)$

$= \frac{e^x}{x} + c$

12. $\int_0^{2/3} \frac{dx}{4+9x^2}$ बराबर होगा-

Sol. $I = \int_0^{2/3} \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{9} \int_0^{2/3} \frac{1}{\left(2/3\right)^2 + x^2} dx$

$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \frac{x}{2/3} \right]_0^{2/3} \qquad = \frac{1}{6} \left[\tan^{-1} \frac{3x}{2} \right]_0^{4/3}$

$= \frac{1}{6} \left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) \right] \qquad = \frac{1}{6} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24}$

13. $\int_{-1}^{1} e^{|x|} dx$ को हल कीजिए-

Sol. $I = \int_{-1}^{1} e^{|x|} dx$

$= \int_{-1}^{0} e^{|x|} dx + \int_0^1 e^{|x|} dx$

$= \int_{-1}^{0} e^{-x} dx + \int_0^1 e^x dx$

$= \left[-e^{-x} \right]_{-1}^{0} + \left[e^x \right]_0^1 \qquad = \left[-e^{-0} + e^1 \right] \left[e - e^0 \right]$

$= -1 + e + e - 1 \qquad = 2e - 2$

14. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ ज्ञात कीजिए-

Sol. $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

माना कि $x^2 + 1 = t$ जब $x = 0$ तब $t = 1$

$2x\,dx = dt \qquad x = 1$ तब $t = 2$

$xdx = \frac{1}{2} dt$

$= \frac{1}{2} [\log 2 - \log 1]$

शेखावाटी मिशन - 100

$= \frac{1}{2}\log 2$

लघुत्तरात्मक प्रश्न

1. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए-

Sol. $I = \int \sqrt{\frac{a-x}{x}}dx$

$x = a\sin^2\theta$ रखने पर

$dx = 2a \sin\theta \cos\theta \, d\theta$

$I = \int \sqrt{\frac{a - a\sin^2\theta}{a\sin^2\theta}} \times 2a \sin\theta \cos\theta \, d\theta$

$\int \frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}} \times 2a \cancel{\sin\theta} \cos\theta \, d\theta$

$= 2a\int \cos^2\theta \, d\theta = 2a\int \left\{\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right\} d\theta$

$= a\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + c = a\left[\theta + \sin\theta\cos\theta\right]$

$a\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1-\frac{x}{a}}\right] + c$

$= a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{x}\sqrt{a-x} + c$

2. $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)}dx$ समाकलन को ज्ञात कीजिए-

Sol. $I = \int \frac{\sin x}{\sin(x+a)}dx$

$x + a = t$ प्रतिस्थापित करने पर $\Rightarrow x = t - a$

$dx = dt$

$I = \int \frac{\sin(t-a)}{\sin t}dt = \int \frac{\sin t \cos a - \cos t \sin a}{\sin t}dt$

$= \int [\cos a - \sin a \cot t]dt$

$= \cos a\int 1.dt - \sin a\int \cot t \, dt$

$= t\cos a - \sin a \log \sin t + c$

$= (x+a)\cos a - \sin a \log\sin(x+a) + c$

3. $\int \cos^4 2x$ को हल कीजिए-

Sol. $I = \int \cos^2 x - \cos^2 x \, dx$

शेखावाटी मिशन – 100

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

$$=\int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left\{1+\cos^2 4x+2\cos 4x\right\}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left\{1+2\cos 4x+\left(\frac{1+\cos 8x}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[x+2\frac{\sin 4x}{4}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 8x}{8}\right)\right]+c$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}+\frac{\sin 4x}{2}+\frac{\sin 8x}{16}\right]+c$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 8x}{64}+c$$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}$ को हल कीजिए-

Sol. $I=\int\frac{1}{5x^2-2x}dx$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{5\left(x^2-\frac{2}{5}x\right)}}dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{5\left\{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}}}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}dx$$

$x-\frac{1}{5}=t$ रखने पर $dx=dt$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|t+\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|x-\frac{1}{5}+\sqrt{x^2-\frac{2x}{5}}\right|+c \text{ A}$$

5. $\int\frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$ को हल कीजिए-

Sol. $I=\int\frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$

$$x+3=A\frac{d}{dx}\left(5-4x-x^2\right)+B$$

$$\Rightarrow x+A\left(-4-2x\right)+B$$

शेखावाटी मिशन - 100

दोनों पक्षों से x के गुणांकों व अचरों को समान करने पर $-A = 1$ और $-4A + B = 3$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2} \text{ और } B = 1$$

$$\therefore \int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-4-2x)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} I_1 + I_2$$

I_1 में $5 - 4x - x^2 = t$ रखने पर $(-4-2x)dx = dt$

$$\therefore I_1 = \int \frac{(-4-2x)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + c_1$$

$$= -2\sqrt{5-4x-x^2} + c_1 \quad ....(1)$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$

$x + 2 = t$ रखने पर $dx = dt$

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \sin^{-1}\frac{t}{3} + c_2$$

$$= \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + c_2 ....(3)$$

समी. (2) व (3) को (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx = -\sqrt{5-4x-x^2} + \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + c$$

6. $\sqrt{\frac{a-x}{x}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए–

Sol. $I = \int \sqrt{\frac{a-x}{x}} dx$

$x = a\sin^2\theta$ रखने पर

$dx = 2a \sin\theta \cos\theta \, d\theta$

$$I = \int \sqrt{\frac{a - a\sin^2\theta}{a\sin^2\theta}} \times 2a \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \times 2a \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \int 2a\cos^2\theta \, d\theta$$

$$= a\int (1 + \cos^2\theta) d\theta = a\left[\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\right] + c$$

$$= a\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} + \sin\theta\cos\theta\right] + c$$

शेखावाटी मिशन - 100

$$= a\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1-\frac{x}{a}}\right]+c$$

$$= a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{x}\sqrt{a-x}+c$$

7. $\int\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}dx$ को हल कीजिए-

Sol. $I=\int\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}dx$

$$\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}=1+\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$$

$$=1+\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+2)}$$

$$\Rightarrow 2x+1=A(x+2)+B(x+1)$$

$$\Rightarrow 2x+1=x(A+B)+2A+B$$

$\Rightarrow A+B=2$ व $2A+B=1$.................(2)

समी. (1) व (2) से

$A=-1\Rightarrow A=-1$

$B=2-(-1)=3$

$$\therefore\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{-1}{(x+1)}+\frac{3}{(x+2)}$$

$$\therefore\int\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}dx=\int 1.dx+\int\frac{-1}{(x+1)}dx+\int\frac{3}{(x+2)}dx$$

$$=x-\log|x+1|+3\log|x+2|+c$$

8. $\int(\log x)^2 dx$ को हल कीजिए-

Sol. $I=\int 1.(\log x)^2 dx$

खंडश : समा. करने पर

$$=(\log x)^2\int 1.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)^2\int 1.dx\right\}dx$$

$$=x(\log x)^2-\int\frac{2\log x}{x}\times xdx$$

$$=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx$$

$$=x(\log x)^2-2\left[\log x\int 1.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int 1.d\right\}\right]$$

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

$= x(\log x)^2 - 2\left[x\log x - \int \frac{1}{x}\times x\,dx\right]$

$= (\log x)^2 - 2\left[x\log x - \int 1.dx\right]$

$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + c$

9. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$ ज्ञात कीजिए–

Sol. $I = \int \sqrt{3-2x-x^2}dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}dx$

$x+1=t$ रखने पर

$dx = dt$

$I = \int \sqrt{4-t^2}dt \qquad = \frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{t}{2} + c$

$= \frac{(x+1)}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

10. योगफल की सीमा के रूप में $\int_0^2 e^x dx$ का मान ज्ञात कीजिए–

Sol. $\int_0^2 e^x dx = (2-0)\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[e^0 + e^{2/x} + e^{4/x} + ... + e^{\frac{2x-2}{x}}\right]$

$2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{e^{\frac{29}{x}}-1}{e^{2/x}-1}\right] \qquad 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{e^2-1}{e^{2/x}-1}\right]$

$= 2(e^2-1) \qquad = e^2 - 1$

$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^{2/x}-1}{2/x}\right].2 \qquad \left\{\because \lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x} = 1\right\}$

11. $\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{3-x}}dx$ को हल कीजिए–

Sol. $I = \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{3-x}}dx$

$x = 3\sin^2\theta \Rightarrow dx = 3\times 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

जब $x=0$ तब $\theta = 0$

$x = 3$ तब $\theta = \frac{\pi}{2}$

$I = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{3\sin^2\theta}{3-3\sin^2\theta}}\times 6\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times 6\sin\theta\cos\theta\,d\theta \qquad = 6\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta$

शेखावाटी मिशन – 100

$= 6\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos^2\theta}{2}\right)d\theta$ $= 3\left[\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$

$= 3\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin^2 \times \frac{\pi}{2} - 0\right]$ $= \frac{3\pi}{2}$

दीर्घात्मक प्रश्न

1. मान ज्ञात कीजिए– $\int \frac{1}{\sqrt{\sin^3 x \sin(x+\alpha)}}dx$

Sol. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x.\sin(x+\alpha)}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha)}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^4 x(\cos\alpha + \sin\alpha\cot x)}}$

$= \int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\cos\alpha + \sin\alpha\cot x}}$

$= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x\, dx}{\sqrt{\cos\alpha + \sin\alpha\cot x}}$

माना कि $\cos\alpha + \sin\alpha\cot x = t$

$\Rightarrow \sin\alpha(-\operatorname{cosec}^2 x)dx = dt$

$\operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\frac{dt}{\sin\alpha}$

अतः $I = \frac{-1}{\sin\alpha}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$

$= \frac{-1}{\sin\alpha}\left[2\sqrt{t}\right] + c$

$= \frac{-2}{\sin\alpha}\left[\sqrt{\cos\alpha + \sin\alpha\cot x}\right] + c$

$= \frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\cos\alpha + \sin\alpha\frac{\cot x}{\sin x}} + c$

$= \frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin x\,\cos\alpha + \cos x\,\sin\alpha}{\sin x}} + c$

$= \frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}} + c$

2. मान ज्ञात कीजिए $\int \frac{dx}{e^x - 1}$

शेखावाटी मिशन – 100

Sol. $I = \int \frac{dx}{e^x - 1}$

$I = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x - 1)}$

पुनः माना कि $e^x = t$ $\Rightarrow e^x dx = dt$

अतः $I = \int \frac{dt}{(t-1)t}$

$\frac{1}{(t-1)(t)} = \frac{A}{(t-1)} + \frac{B}{t}$

$1 = At + B(t-1)$

$t = 0$ रखने पर $-B = 1 \Rightarrow B = -1$

$t = 1$ रखने पर $A = 1$

$\therefore \frac{1}{(t-1)(t)} = \frac{1}{(t-1)} - \frac{1}{t}$

$\therefore \int \frac{dt}{(t-1)(t)} = \int \left\{\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right\} dt = \log|t-1| - \log t + c$

t का मान रखने पर

$\int \frac{e^x dx}{e^x(e^x - 1)} = -\log|e^x| + \log|e^x - 1| + c$

$\int \frac{dx}{e^x - 1} = \log\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + c$

3. ज्ञात कीजिए $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Sol. $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x + \cos x + \sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)} dx$

$= \frac{1}{2}\int \left\{1 + \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)}\right\} dx$

$= \frac{1}{2}\int 1.dx + \frac{1}{2}\int \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)} dx$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$

शेखावाटी मिशन – 100

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|\sin x + \cos x| + c$

4. $\int x \tan^{-1} x\, dx$ ज्ञात कीजिए–

Sol. $I = \int x \tan^{-1} x\, dx$

खण्डश: समाकलन से

$= \tan^{-1} x \int x.dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) \int x.dx \right\} dx$

$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \int \frac{x^2}{2\left(1+x^2\right)} dx$

$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx$

$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left\{ 1 - \frac{1}{1+x^2} \right\} dx$

$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$

$= \left(\frac{x^2+1}{2} \right) \tan^{-1} - \frac{1}{2} x + c$

निबन्धात्मक प्रश्न

1. $\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए–

Sol. $I = \int_0^{\pi/2} \log\, \sin x\, dx$...............(1)

$I = \int_0^{\pi/2} \log\, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx$ {P_4 गुणधर्म से

$= \int_0^{\pi/2} \log \cos x\, dx$.............(2)

समी. (1) + समी. (2)

$2I = \int_0^{\pi/2} \left(\log \sin x + \log \cos x \right) dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \log\, \sin x\, \cos x\, dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \log \left(\frac{2 \sin x\, \cos x}{2} \right) dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \log \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\, dx - \int_0^{\pi/2} \log 2 dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\, dx - \log 2 \left[x \right]_0^{\pi/2}$

शेखावाटी मिशन – 100

$= I_1 - \frac{\pi}{2}\log 2$..............(3)

$\because I_1 = \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x \, dx$ में

$2x = t$ रखने पर $2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

जब $x = 0$ तब $t = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ तब $t = \pi$

$\therefore I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t \, dt$

$I_1 = \frac{2}{2}\int_0^{\pi/2} \log \sin t \, dt$ {P_6 गुणधर्म से

$I_1 = \int_0^{\pi/2} \log \sin t \, dt$

$I_1 = \int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dt$ {चर t को x में परिवर्तित करने पर ……………(4)

समी. (4) को समी. (3) में रखने पर

$\Rightarrow 2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2$ {पुनः समी. (1) से

$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\log 2$

2. $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin x}$ को हल कीजिए-

Sol. $I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx$...............(1)

$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin x(\pi - x)}$ $\left\{\because \int_0^{a} f(x)dx - \int_0^{a} f(a-x)dx\right.$

$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{1+\sin x} dx$..............(2)

समी. (1) व (2) को जोड़ने पर

$2I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx + \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin x}dx$

$= \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$

$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{1-\sin x}dx$

$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi}\left(\sec^2 x - \sec x \tan x\right)dx$

$\Rightarrow 2I = \pi\left[\tan x - \sec x\right]_0^{\pi}$

$\Rightarrow 2I = \pi\left[0 - \sec\pi - 0 + \sec 0\right]$

$\Rightarrow 2I = \pi\left[1 - 1\right] = 2\pi$

$\Rightarrow \boxed{I = \pi}$

3. $I = \int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx$

Sol. $I = \int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx$ ....(1)

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi}\log\left[1+\cos(\pi - x)\right]dx$ $\quad\left\{\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right\}$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx$ ....(2)

समी. (1) + समी. (2)

$2I = \int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx + \int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi}\log(1+\cos x)(1-\cos x)dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi}\log\left(1-\cos^2 x\right)dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi}\log\ \sin^2 x\ dx$

$\Rightarrow 2I = 2\int_0^{\pi}\log\ \sin x\ dx$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi}\log\ \sin x\ dx$ ....(3)

$I = 2\int_0^{\pi/2}\log\ \sin x\ dx$

$\left\{\because \int_0^{2a} f(x)dx - 2\int_0^{a} f(x)dx \text{ if } f(2a-x) = f(x)\right\}$

$f(x) = \log\ \sin x$ $\quad f(\pi - x) = \log\ \sin(\pi - x) = \log \sin x = f(x)$

$I = 2I_1$ ....(4)

$I_1 = \int_0^{\pi/2}\log \sin x\ dx$ ....(5)

$I_1 = \int_0^{\pi/2}\log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$ $\quad\left\{\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right\}$

$I_1 = \int_0^{\pi/2}\log \cos x\ dx$ ....(6)

समी. (5) + (6)

$2I_1 = \int_0^{\pi/2}\log \sin x\ dx + \int_0^{\pi/2}\log\cos x\ dx$

$2I_1 = \int_0^{\pi/2}\log\ (\sin x\cos x)\ dx$

$\Rightarrow 2I_1 = \int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{2\sin x\cos x}{2}\right)dx$

शेखावाटी मिशन – 100

$\Rightarrow 2I_1 = \int_0^{\pi/2}(\log\sin 2x - \log 2)dx$

$\Rightarrow 2I_1 = \int_0^{\pi/2}\log\ \sin 2x\ dx - (\log 2)\int_0^{\pi/2}1.dx$

$\Rightarrow 2I_1 = \int_0^{\pi/2}\log\ \sin 2x\ dx - \frac{\pi}{2}\log 2x$

$\Rightarrow$ माना $2x = t \Rightarrow 2dx = dt$

जब $x = 0$ तब $t = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ तब $t = \pi$

$2I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\ \sin t\ dt - \frac{\pi}{2}\log 2$

$= \frac{1}{2}\times 2\int_0^{\pi/2}\log\ \sin t\ dt - \frac{\pi}{2}\log 2$ { $\because$ f(2a –x) = f(x) तब $\int_0^{2a} f(x)dx\ a = 2\int_0^{a} f(x)dx$

$2I_1 = \int_0^{\pi/2}\log\sin x\ dx - \frac{\pi}{2}\log 2$ { चर t को x में परिवर्तित करने पर

$\Rightarrow 2I_1 = I_1 - \frac{\pi}{2}\log 2$

$\Rightarrow I_1 = -\frac{\pi}{2}\log 2$ समी. (4) में मान रखने पर

$\boxed{I = 25_1 = -\pi\log 2}$

4. $\int_0^{\pi/2}\sin 2x\tan^{-1}(\sin x)dx$

Sol. माना कि $I = \int_0^{\pi/2}\sin 2x\tan^{-1}(\sin x)dx$

माना कि sin x = t रखने पर cosx dx = dt

यदि x = 0 तक t = 0

$x = \frac{\pi}{2}$ तब $t = 1$

$I = \int_0^{\pi/2}2\sin x\cos x\tan^{-1}(\sin x)dx$

$= 2\int_0^{1}t\tan^{-1}t\ dt$

ILATE के अनुसार $\tan^{-1}t$ को प्रथम फलन मानकर खण्डक: समाकलन करने पर

$I = 2\left[\tan^{-1}t.\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - 2\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\times\frac{t^2}{2}dt$

$= 2\left[\left\{\frac{1}{2}\tan^{-1}(1) - 0\right\} - 0\right] - \int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$

$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4} = \int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$= \frac{\pi}{4} - \left(t - \tan^{-1}t\right)_0^1$

शेखावाटी मिशन - 100

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(t-\tan^{-1}t-0\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

5. $\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$ को हल कीजिए-

Sol. माना कि $I=\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$ ....(1)

$$I=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\tan(\pi-x)}{\sec(\pi-x)+\tan(\pi-x)}dx \qquad \left\{\because \int_0^{a}f(x)dx=\int_0^{a}f(a-x)dx\right\}$$

$$I=\int_0^{\pi}\frac{-(\pi-x)\tan x}{\sec x\, t\tan x}dx \text{ ....(2)}$$

समी. (1) समी. (2)

$$2I=\int_0^{\pi}\frac{(x+\pi-x)\tan x}{\sec x+\tan x}dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\tan x}{\sec x+\tan x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}dx$$

$$=2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=$$

$$2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{1+\sin-x}{1+\sin x}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right)dx$$

$$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}1.dx-\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin x}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\pi[x]_0^{\pi}-\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\pi^2-\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\pi^2-\pi\int_0^{\pi}\left(\sec^2 x-\tan x\sec x\right)dx$$

$$\Rightarrow 2I=\pi^2-\pi\left[\tan x-\sec x\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow 2I=\pi^2-\pi\left[(\tan\pi-\sec\pi)-(\tan 0-\sec 0)\right]$$

शत्प्रतिशत मिशन - 100

$$\Rightarrow 2I = \pi^2 - \pi\left[\{0-(-1)\}-\{0-1\}\right]$$

$$\Rightarrow 2I = \pi^2 - \pi[1+1]$$

$$\Rightarrow 2I = \pi^2 - 2\pi$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\pi^2 - 2\pi\right)$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)}$$

शेखावाटी मिशन – 100

कक्षा - 12 (Maths)
(अवकल समीकरण)
अध्याय - 09

वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

1. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0$ की घात है–

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) परिभाषित नहीं

Ans. d

2. अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=0$ की कोटि है–

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) परिभाषित नहीं

Ans. a

3. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}=5\left(\frac{dy}{dx}\right)^{3/2}$ की कोटि तथा घात होगी–

(a) 2, 1 (b) 1,2 (c) 2,2 (d) 1,1

Ans. c

4. चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है–

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Ans. d

5. तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है–

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

Ans. d

6. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$ का व्यापक हल है–

(a) $e^x+e^{-y}=c$ (b) $e^x+e^y=c$ (c) $e^{-x}+e^y=c$ (d) $e^{-x}+e^{-y}=c$

Ans. a

7. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2$ का समाकलन गुणक है

(a) e^{-x} (b) e^{-y} (c) $\frac{1}{x}$ (d) x

Ans. c

8. अवकल समीकरण $(1-y^2)\frac{dx}{dy}+yx=ay\,(-1<y<1)$ का समाकलन गुणक है–

(a) $\frac{1}{y^2-1}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ (c) $\frac{1}{1-y^2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Ans. d

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

अतिलघुत्तरात्तम प्रश्न

1. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}-\left(\frac{1}{1+x}\right)y-(1+x)e^x=0$ में समाकल गुणांक ज्ञात कीजिए–

Sol. दिया है $\frac{dy}{dx}-\left(\frac{1}{1+x}\right)y=(1+x)e^x$

यहाँ $p=-\frac{1}{(1+x)}$

अतः I.F. = $e^{\int\frac{-1}{1+x}dx}=e^{-\log|1+x|}$

$=e^{-\log|1+x|}$

$=\frac{1}{1+x}$

2. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ का हल ज्ञात कीजिए–

Sol. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

$\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow\int\frac{dy}{dy}=\int\frac{dx}{x}$

$\log|y|=\log|x|+\log|c|$

$y=cx$

लघुत्तरात्मक प्रश्न

1. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=-4xy^2$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए यदि $y=1$ जब $x=0$ हो–

Sol. यदि $y\neq0$ दिया हुआ अवकल समीकरण निम्न रूप में लिखने पर

$\frac{dy}{y^2}=-4xdx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$\int\frac{dy}{y^2}=-4\int xdx$

$\Rightarrow-\frac{1}{y}=-2x^2+c$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2x^2c}$

$x=0$ पर $y=1$ रखने पर

$1=\frac{1}{2.0^2-c}$

$\Rightarrow c=-1$

अतः विशिष्ट हल $y=\frac{1}{2x^2-1}$

2. वक्रों के कुल $y=a\sin(x+b)$, जिसनें a, b स्वेच्छ अचर है, को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण को ज्ञात कीजिए–

शेखावाटी मिशन - 100

Sol. दिया हुआ है कि $y = a\sin(x+b)$.........(1)

समीकरण (1) अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = a\cos(x+b)........(2)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -a\sin(x+b)........(3)$$

समीकरण (1), (2) व (3) से a व b को विलुप्त करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

3. ऐसे वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। जिनका केंन्द्र y - अक्ष पर है और जिनकी त्रिज्या 3 इकाई है।

Sol. माना कि ऐसे वृत्त का केन्द्र (0,K)

वृत्तों के कुल का समीकरण $x^2 + (y-k)^2 = 9$...........(1)

x के सापेक्ष अवकल करने पर $2x + 2(y-k)\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow y - b = -\frac{x}{dy/dx}$$

इसका मान समीकरण (1) में रखने पर

$$x^2 + \left(-\frac{x}{dy/dx}\right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2\left(dy/dx\right)^2 + x^2 = 9\left(dy/dx\right)^2$$

$$\Rightarrow (x^2 - 9)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 = 0$$

4. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए–

Sol. $\because \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \Rightarrow \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + c$$

व्यापक हल है।

ओस्मोटिक मिशन – 100

5. बिंदु $(-2,3)$ से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु (x,y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है।

Sol. किसी वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ के बराबर होती है।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y^2}........(1)$$

$$\Rightarrow y^2dy=2xdx........(2)$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int y^2dy=\int 2xdx \qquad .... (2)$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{3}=x^2+c..........(3)$$

समीकरण (3) में $x=-2$ व $y=3$ प्रतिस्थापित करने पर

$$a=4+c \qquad\qquad \Rightarrow c=5$$

C का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$\frac{y^3}{3}=x^2+5 \qquad\qquad \Rightarrow \boxed{y^3=3x^2+15}$$

निबन्धात्मक प्रश्न

1. अवकल समीकरण $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ को हल कीजिये।

Sol. $$\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\frac{e^{x/y}\left(1-x/y\right)}{\left(1+e^{x/y}\right)}=f(x,y)$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=-\frac{e^{\lambda x/\lambda y}\left(1-\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)}{\left(1+e^{x/\lambda y}\right)}$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=-\frac{e^{x/y}\left(1-x/y\right)}{1+e^{x/y}}=f(x,y)$$

$\Rightarrow f(x,y)$ समघातीय फलन है जिसकी घात शून्य है

अब $x=v\,y$ रखने पर

शेखावाटी मिशन – 100

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \nu + y\frac{d\nu}{dy}$$

$$\therefore \nu + y\frac{d\nu}{dy} = \frac{\left(\frac{\nu y}{y} - 1\right)e^{\nu y/y}}{1 + e^{\nu y/y}}$$

$$\Rightarrow \nu + y\frac{d\nu}{dy} = \frac{(\nu - 1)e^{\nu}}{1 + e^{\nu}}$$

$$\Rightarrow y\frac{d\nu}{dy} = \frac{(\nu - 1)e^{\nu}}{1 + e^{\nu}} - \nu$$

$$\Rightarrow y\frac{d\nu}{dy} = \frac{\nu e^{\nu} - e^{\nu} - \nu - \nu e^{\nu}}{(1 + e^{\nu})}$$

$$\Rightarrow y\frac{d\nu}{dy} = -\frac{(\nu + e^{\nu})}{(1 + e^{\nu})}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 + e^{\nu}}{\nu + e^{\nu}}\right)d\nu = -\frac{dy}{y}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{1 + e^{\nu}}{\nu + e^{\nu}}d\nu = -\int \frac{dy}{y}$$

$\nu + e^{\nu} = t$ रखने पर

$$(1 + e^{\nu})d\nu = dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dt}{t} = -\log|y| + \log c$$

$$\log|t| = -\log|y| + \log c$$

$$\Rightarrow \log(\nu + e^{\nu}) = -\log|y| + \log c$$

$$\Rightarrow \log(\nu + e^{\nu}) + \log|y| = \log c$$

$$\Rightarrow \log|y(\nu + e^{\nu})| = \log c$$

$$\Rightarrow y(\nu + e^{\nu}) = c$$

$\nu = \frac{x}{y}$ रखने पर

$\therefore$ अभिष्ट हल $\quad y\left(\frac{x}{y} + e^{x/y}\right) = c$

$$\Rightarrow x + y\,e^{x/y} = c$$

$$\Rightarrow \boxed{y\,e^{x/y} + x = c}$$

2. अवकल समीकरण $x^2dy + (xy + y^2)dx = 0$ को हल कीजिए यदि $x = 1$ तो $y = 1$

Sol. $\because x^2dy + (xy + y^2)dx = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(xy + y^2)}{x^2}$$

दी गयी अवकल समीकरण समघात अवकल समीकरण है अतः $y = \nu x$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \nu + x\frac{d\nu}{dx}$$

$$\Rightarrow \nu + x\frac{d\nu}{dx} = -\frac{\left(x^2\nu + \nu^2 x^2\right)}{x^2}$$

$$\Rightarrow \nu + x\frac{d\nu}{dx} = -\frac{\left(\nu + \nu^2\right)x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \nu + x\frac{d\nu}{dx} = -\left(\nu + \nu^2\right)$$

$$\Rightarrow x\frac{d\nu}{dx} = -\nu - \nu^2 - \nu$$

$$= -2\nu - \nu^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(2\nu + \nu^2\right)}d\nu = -\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{1}{\left(2\nu + \nu^2\right)}d\nu = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\nu^2 + 2\nu + 1 - 1}d\nu = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(\nu + 1)^2 - 1}d\nu = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log\left|\frac{\nu + 1 - 1}{\nu + 1 + 1}\right| = -\log|x| + \log c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log\frac{\nu}{\nu + 2} + \log|x| = \log c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log\left|\frac{\nu}{\nu + 2}\right| + \frac{1}{2}\log|x|^2 = \log c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log\left|\frac{\nu}{(\nu + 2)} \times x^2\right| = \log c$$

$$\Rightarrow \log\sqrt{\frac{\nu x^2}{(\nu + 2)}} = \log c$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\nu x^2}{\nu + 2}} = c$$

$\nu = {}^{y}\!/_{x}$ रखने पर

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\frac{y}{x} \times x^2}{\frac{y}{x} + 2}} = c$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{yx^2}{y + 2x}} = c$$

$\Rightarrow$ दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$yx^2 = c^2(y + 2x)$$

$x = 1,\ y = 1$ रखने पर

$$1 = c^2(1 + 2)$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{3}$$

शेखावाटी मिशन - 100

अतः अभिष्ट हल $\boxed{yx^2 = \frac{1}{3}(y+2x)}$

3. अवकल समीकरण $x\log x\frac{dy}{dx}+y=\frac{2}{x}\log x$ को हल कीजिए-

Sol. अवकल समीकरण $x\log x\frac{dy}{dx}+y=\frac{2}{x}\log x$..............(1)

समीकरण (1) को x log x से भाग देने पर

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x\log x}=\frac{2}{x^2}\text{.............}(2)$$

समीकरण (2) की तुलना $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ से करने पर

यहाँ $P(x)=\frac{1}{x\log x}$,

$$Q(x)=\frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \text{I.F.} = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x\log x}dx}$$

माना $\log x = t$ $\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$

$$\therefore \text{I.F} = e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{\log t}$$

$\text{I.F} = t$ $\text{I.F} = \log x$

अतः अवकल समीकरण का हल

$y\times \text{I.F} = \int Q\times \text{I.F.}dx + c$ $\Rightarrow y.\log x = \int \frac{2}{x^2}\log x\, dx + c$

log x को प्रथम फलन मानकर समाकलन करने पर

$$\Rightarrow y.\log x = 2\left[\log x\int\frac{1}{x^2}dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int\frac{1}{x^2}dx\right\}dx\right]$$

$$\Rightarrow y\log x = 2\left[\log x\left(-\frac{1}{x}\right) - \int\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)dx\right]+c$$

$$\Rightarrow y\log x = -\frac{2}{x}\log x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)+c$$

अतः अभिष्ट हल $y\log x = -\frac{2}{x}\log x - \frac{2}{x} + c$

$$\Rightarrow \boxed{y\log x = -\frac{2}{x}(\log x + 1) + c}$$

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

कक्षा - 12 (Maths)
(सदिश)
अध्याय - 10

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. निम्न में से सदिश राशि नहीं है–

(a) वेग (**b**) आयतन (c) त्वरण (d) बल

2. $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ हो तो $\vec{a} + \vec{b}$ का मान है–

(a) $6\hat{i} + 3\hat{j}$ (**b**) $2\hat{i} + 3\hat{j}$ (c) $2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ (d) कोई नहीं

3. यदि $x\hat{i} + y\hat{j} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ हो तो x और y का मान है–

(a) 2, 3 (b) –2, 3 (**c**) 2, –3 (d) –2, –3

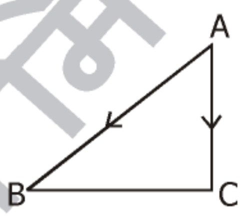
4. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ हो तो $\vec{a}$ का परिमाण होगा–

(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (**d**) $\sqrt{3}$

5. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ हो तो $\vec{a}.\vec{b}$ का मान है–

(a) 3 (**b**) 4 (c) 0 (d) 2

6. किसी ΔABC के लिए सत्य कथन है–



(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ (**b**) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ (d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$

7. शून्य सदिश की दिशा होती है–

(**a**) अनिश्चित (b) निश्चित (c) x-अक्ष की ओर (d) y-अक्ष की ओर

8. $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के समान्तर सदिश है–

(a) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ (**b**) $-4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ (c) $4\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ (d) $-4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

9. सदिश $\hat{i} + \hat{j}$ का सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ पर प्रक्षेप है–

(a) 1 (b) 2 (**c**) 0 (d) –1

10. $\hat{i} \times \hat{i} + \hat{i}.\hat{i}$ का मान है–

(a) 2 (b) 0 (c) –1 (**d**) 1

11. शून्येतर सदिश $\vec{a}$ का परिमाण a है और λ एक शून्येतर अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ मात्रक सदिश होगा यदि–

(a) $\lambda = 1$ (b) $\lambda = -1$ (c) $a = |\lambda|$ (**d**) $a = \frac{1}{|\lambda|}$

12. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ लम्बवत् सदिश हो तो सत्य है–

(a) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ (b) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{0}$ **(c)** $\vec{a}.\vec{b}=0$ (d) $\vec{a}\times\vec{b}=0$

13. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ हो तो $\vec{c}$ लम्बवत् होता है–

(a) $\vec{a}$ के (b) $\vec{b}$ के (c) $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों के नहीं **(d)** $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों के

14. एकांक सदिश का परिमाण .... होता है–

Sol. एक

15. दो या दो से अधिक सदिश जिनका प्रारम्भिक बिन्दु समान हो .... सदिश कहलाते है–

Sol. सह आदिम सदिश

16. सदिश $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ तथा सदिश $-4\hat{i}+6\hat{j}+\lambda\hat{k}$ संरेख है तो λ का मान .... होगा–

Sol. $\lambda=8$

17. सदिश $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ की द्विक् को साइन .... है

Sol. $\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}$

18. $(\hat{i}\times\hat{j}).\hat{j}+\hat{i}\times\hat{k}$ का मान ....होगा।

Sol. $-\hat{j}$

19. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

Sol. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

अतः $\vec{a}$ का परिमाण $|\vec{a}|=\sqrt{(2)^2+(3)^2+(1)^2}=\sqrt{14}$

अतः $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{a}=\frac{2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{14}}$

20. बिन्दु P(2, 3, 4) और Q(4, 1, –2) को मिलाने वाले सदिश का मध्या बिन्दु का सदिश ज्ञात करों–

Sol. यदि P और Q का मध्य बिन्दु R हो तो

R का स्थिति सदिश $=\frac{1}{2}$ [P का स्थिति सदिश + Q का स्थिति सदिश]

$=\frac{1}{2}\left[\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)+4\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right]$ $=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

अतः P और Q के मध्य बिन्दु R का स्थिति सदिश $=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

21. $\vec{a}$ एक एकांक सदिश है तथा $(\vec{x}-\vec{a}).(\vec{x}+\vec{a})=15$ तो $|\vec{x}|$ ज्ञात करों–

Sol. $\because(\vec{x}-\vec{a}).(\vec{x}+\vec{a})=15$

$\Rightarrow\vec{x}.\vec{x}+\vec{x}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{x}-\vec{a}.\vec{a}=15$ $\Rightarrow|\vec{x}|^2-|\vec{a}|^2=15$

$\Rightarrow |\vec{x}|^2 - 1 = 15$ [$\because$ $\vec{a}$ एक एकांक सदिश है]

$\Rightarrow |\vec{x}|^2 = 16$

$\Rightarrow |\vec{x}| = 4$ $\left[\because |\vec{x}| > 0\right]$

अतः $\vec{x}$ का परिमाण 4 इकाई है।

22. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः 1 और 2 तथा $\vec{a}.\vec{b} = 1$ तो इन सदिशों के बीच कोण होगा–

Sol. $|\vec{a}| = 1$ $|\vec{b}| = 2$ तथा $\vec{a}.\vec{b} = 1$

यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण θ हो तो $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{1\times 2}$ $\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

अतः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण $\dfrac{\pi}{3}$ है।

23. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ हो तो $\vec{a}\times\vec{b}$ ज्ञात करों–

Sol. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$

अतः $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \hat{i}(-2-15) - \hat{j}(-4-9) + \hat{k}(10-3)$ $\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = -17\hat{i} + 13\hat{j} + 7\hat{k}$

अतः $\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = -17\hat{i} + 13\hat{j} + 7\hat{k}}$

24. दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य न्यून कोण θ हो तथा $|\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$ तब θ का मान ज्ञात करों–

Sol. $\because |\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$

$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta||\hat{n}|$

$\Rightarrow \cos\theta = \sin\theta$ [$|\hat{n}| = 1$ तथा θ न्यून कोण है]

$\Rightarrow \tan\theta = 1$ $\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$

अतः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण $\dfrac{\pi}{4}$ होगा।

25. समान परिमाण के कोई विभिनन सदिश लिखिए।

Sol. $\vec{a} = \hat{i}$ तथा $\vec{b} = \hat{j}$

विशेष :– इस प्रश्न के उत्तर में हम कोई भी दो सदिश लिख सकते है। अतः इसका उत्तर अद्वितीय नहीं है।

शेखावाटी मिशन – 100

26. यदि $|\vec{a}| = 2$ तथा $|\vec{b}| = 3$ तथा $\vec{a}.\vec{b} = 4$ हो तो $|\vec{a} - \vec{b}|$ ज्ञात करों–

Sol. $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ तथा $\vec{a}.\vec{b} = 4$

अब $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b})$

$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b}$ $\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (2)^2 - 2(4) + (3)^2$ $\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4 - 8 + 9$

$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 5$ $\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$

अतः $\boxed{|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}}$

27. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो। जिसकी सलंग्न भुजाएं $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ है–

Sol. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $|\vec{a} \times \vec{b}|$

अब $|\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \hat{i}(1+4) - \hat{j}(3-4) + \hat{k}(-3-1)$

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ अब $\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(5)^2 + (1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4^2}$

अतः समान्तर चतुर्भुज का क्षैत्रफल $= \sqrt{42}$ वर्ग इकाई होगा।

28. दो मात्रक सदिशों का योग भी मात्रक सदिश है तो उनके बीच कोण ज्ञात करो–

Sol. माना $\vec{a}$ और $\vec{b}$ मात्रक सदिश है

तब $\vec{a} + \vec{b}$ भी मात्रक सदिश होगा

$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1$ $\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 1$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$ $\Rightarrow 1 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta + 1 = 1$

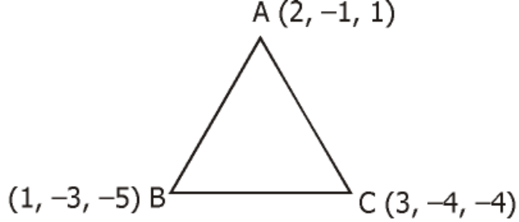
$\Rightarrow 2\cos\theta = -1$ $\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण $\frac{2\pi}{3}$ होगा।

29. सिद्ध कीजिए बिन्दु A(2, –1, 1), B(1, –3, –5) और C(3, –4, –4) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

श्रेखावाटी मिशन - 100



Sol. अब $\overrightarrow{AB} =$ बिन्दु B का स्थिति सदिश बिन्दु A का स्थिति सदिश

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i} + \hat{j}(-3+1) + \hat{k}(-3-1)$ $\quad\quad \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

तथा $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{41}$ $\quad\quad$ इस प्रकार $\overrightarrow{BC} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

तथा $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ $\quad\quad$ तथा $\overrightarrow{AC} = \sqrt{35}$

अब यह स्पष्ट है कि $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$ अत: दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर है अत: ΔABC समकोण है।

30. $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}, \vec{c}$ पर लम्ब है तो λ का मान ज्ञात करो–

Sol. $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k},$ $\quad\quad \vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

तथा $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ $\quad\quad$ अब $\vec{a} + \lambda\vec{b} = (2-\lambda)\hat{i} + (2+2\lambda)\hat{j} + (3+\lambda)\hat{k}$

$\because \vec{a} + \lambda\vec{b} = \vec{c}$ पर लम्ब है अत: $\quad\quad (\vec{a} + \lambda\vec{b}).\vec{c} = 0$

$\Rightarrow \left[(2-\lambda)\hat{i} + (2+2\lambda)\hat{j} + (3+\lambda)\hat{k}\right].(3\hat{i} + \hat{j}) = 0$

$\Rightarrow 6 - 3\lambda + 2 + 2\lambda + 0 = 0$ $\quad\quad \Rightarrow 8 - \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = 8$ $\quad\quad$ अत: λ का मान $= 8$

31. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ हो तो $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ प्रत्येक के लम्बवत् 4 इकाई का सदिश ज्ञात करो–

Sol. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ $\quad\quad \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

अत: $\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ $\quad\quad$ तथा $\vec{a} - \vec{b} = -\hat{j} - 2\hat{k}$

अब $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ दोनों के लम्बवत् सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ का सदिश गुणनफल होगा।

अत: $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \hat{i}(-6+4) = \hat{j}(-4-0) + \hat{k}(-2-0)$

$= -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k} = \vec{c}$ (माना) $\quad\quad$ अब $\vec{c}$ के लम्बवत् एकांक सदिश $\hat{c} = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$

शेखावाटी मिशन - 100

$\vec{c} = \frac{-2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{24}}$

अब $\vec{c}$ के अनुदिश 4 इकाई का सदिश = $4\hat{c}$

$= 4\left(-\frac{2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{24}}\right) \qquad = \frac{-2}{\sqrt{6}}[2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}]$

अतः $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ और $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ के लम्बवत् 4 इकाई का सदिश $= \frac{-2}{\sqrt{6}}\left(+2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}\right)$ है।

32. तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ प्रतिबंध $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ को सन्तुष्ट करते है। यदि $|\vec{a}|=1$ $|\vec{b}|=4$ तथा $|\vec{c}|=2$ तो $\mu = \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ का मान ज्ञात करो-

Sol. $\because \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \qquad \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2 = 0$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}+2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}.\vec{c}+2\vec{c}.\vec{a}=0$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\left(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}\right)=0 \qquad \Rightarrow 1+16+4+2\mu=0$

$\Rightarrow 2\mu = -21 \qquad \Rightarrow \mu = -\frac{21}{2}$

अतः $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ का मान $= -\frac{21}{2}$

32. सदिश $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ का सदिशों $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ और $\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ के योगफल की दिशा में मात्रक सदिश के साथ साथ अदिश गुणनफल 1 है तो λ का मान ज्ञात करो-

Sol. $\because \vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k} \qquad \vec{b} = 2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$

तथा $\vec{c} = \lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k} \qquad$ अब $\vec{b}+\vec{c} = (2+\lambda)\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k} = \vec{c}$ (माना)

अब $\vec{d}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{c} = \frac{(2+\lambda)\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{(2+\lambda)^2+36+4}}$

प्रश्नानुसार $\vec{a}$ का $\hat{c}$ के साथ सदिश गुणनफल 1 है अतः $\vec{a}.\hat{c}=1$

$\Rightarrow \left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right).\left[\frac{(2+\lambda)\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{(2+\lambda)^2+40}}\right]=1 \qquad \Rightarrow 2+\lambda+6-2=\sqrt{\lambda^2+4\lambda+44}$

$\Rightarrow \lambda+6=\sqrt{\lambda^2+4\lambda+44}$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$\Rightarrow \lambda^2+12+36=\lambda^2+4\lambda+44 \qquad \Rightarrow 12\lambda+36=4\lambda+44$

$\Rightarrow 8\lambda=8 \qquad \Rightarrow \lambda=1$

अतः λ का मान = 1 होगा।

शेखावाटी मिशन - 100

कक्षा - 12 (Maths)

(प्रायिकता)

अध्याय - 13

प्रश्नोत्तर

1. यदि P(A) = 0.8 तथा P(B) = 0.5 और $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.4$ तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ ज्ञात करो-

(a) $\frac{25}{16}$ **(b)** $\frac{16}{25}$ (c) $\frac{8}{10}$ (d) $\frac{5}{10}$

2. $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = 0$ तब $P\left(\frac{A}{B}\right)$ का मान है-

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ **(c)** अपरिभाषित (d) 1

3. A और B दो घटनाएँ इस प्रकार है कि $P\left(\frac{A}{B}\right) = P\left(\frac{B}{A}\right) \neq 0$ तब सत्य है-

(a) ACB (b) A = B (c) $A \cap B = \phi$ **(d)** P(A) = P(B)

4. A और B स्वतन्त्र घटनाएँ है तथा P(A) = 0.3, P(B) = 0.4 तो $P(A \cap B)$ का मान है-

(a) 0.3 **(b)** 0.12 (c) 0.4 (d) $\frac{3}{4}$

5. $P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{1}{5}$ A तथा B परस्पर अपवर्जी है तो $P(A \cup B)$ का मान है-

(a) $\frac{4}{5}$ (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{2}{5}$

6. एक सिक्के को 2 बार उछाला जाता है तब चितो की संख्या को यादृच्छिक चर (x) माने तो x का कौनसा मान नहीं होगा-

(a) 0 (b) 1 (c) 2 **(d)** 3

7. $P(A) \neq 0$ तथा $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$ हो तो सत्य है-

(a) $A \subset B$ (b) $B \subset A$ (c) $B = \phi$ (d) $A = \phi$

8. एक पासे एक बार फेकने पर अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता है-

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{2}{6}$ **(c)** $\frac{3}{6}$ (d) $\frac{4}{6}$

9. एक सिक्के को 2 बार उछाला जाता है तो ठीक-ठीक 2 चित आने की प्रायिकता है-

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{2}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{4}$

10. यदि $P(A^1) = \frac{3}{4}$ हो तो P(A) होगा-

शेखावाटी मिशन - 100

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 0 (d) 1

11. निश्चित घटना की प्रयिकता होती है-

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

12. दिए गए प्रायिकता बंटन के लिए K का मान क्या होगा-

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.1	K	2K	2K	K

Sol. $\sum P(X)=1$ $\Rightarrow 0.1+K+2K+2K+K=1$

$\Rightarrow 6K=0.9$ $\Rightarrow K=\frac{0.9}{6}$

$\Rightarrow \boxed{K=0.15}$

13. 52 पत्तों की एक गड्डी से बिना प्रतिस्थापित किए दो लाल रंग के पत्ते निकालने की प्रायिकता ज्ञात करो-

Sol. कुल पत्ते = 52 लाल रंग के पत्ते = 26

अत: प्रथम पत्ते के लाल रंग के होने की प्रायिकता $=\frac{26}{52}$

अब पहले पत्ते को बिना प्रतिस्थापित किए दूसरा पत्ता लाल रंग का निकालने की प्रायिकता $=\frac{25}{51}$

अत: दोनों पत्ते बिना प्रतिस्थापित किए लाल रंग के निकालने की प्रायिकता $=\frac{26}{52}\times\frac{25}{51}=\frac{25}{102}$

14. यदि $P(A)=\frac{1}{2}$ तथा $P(B)=\frac{3}{4}$ तथा A और B स्वतन्त्र घटनाएँ है तो P(A नहीं और B नहीं) का मान ज्ञात करो-

Sol. $\because P(A)=\frac{1}{2},$ $P(B)=\frac{3}{4}$

अत: $P(A^1)=\frac{1}{2}$ तथा $P(B^1)=\frac{1}{4}$

$\because$ A और B स्वतन्त्र घटनाएँ है अत: A^1 और B^1 भी स्वतन्त्र घटनाएँ होगी

अब P(A नहीं और B नहीं) $=P(A^1\cap B^1)$

$=P(A^1)\,P(B^1)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{8}$

15. यदि पासे का एक जोड़ा उछाला जाता है तो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करो-

Sol. पासे के एक जोड़ा एक बार उछालने पर कुल परिणाम = $6\times 6=36$

सम अभाज्य संख्या 2 होती है अत: दोनों पासों पर सम अभाज्य संख्या आने के अनुकुलन परिणाम = 1 {(2, 2)}

शेखावाटी मिशन - 100

अतः अभिष्ट प्रायिकता $=\frac{1}{36}$

16. एक लीप वर्ष का चयन किया जाता है तो उस वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात करो–

Sol. एक लीप वर्ष में 366 दिन होते है

अतः 52 सप्ताह और 2 दिन

52 सप्ताह में 52 रविवार आयेगें। अब शेष 2 दिन निम्न प्रकार से आ सकते है।

S = {(रवि, सोम), (सोम, मंगल), (मंगल, बुध), (बुध, गुरू), (गुरू, शुक्र), (शुक्र, शनि), (शनि, रवि)}

कुल परिणाम = 7

शेष दो दिन रविवार होने के

अनुकूल परिणाम = 2 {(रवि, सोम), (शनि, रवि)}

अतः 53 रविवार आने की प्रायिकता $=\frac{2}{7}$

17. एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात करो–

Sol. माना घटना E = संख्या 4 का न्यूनतम 1 बार प्रकट होना

F = संख्याओं का योग 6 आना

अतः $E=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4)\}$

$F=\{(1,5),(5,1),(4,2),(2,4),(3,3)\}$

अब $E\cap F=\{(4,2),(2,4)\}$

अतः $P(E)=\frac{11}{36}$, $P(F)=\frac{5}{36}$,

$P(E\cap F)=\frac{2}{36}$

संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता $P\left(\frac{E}{F}\right)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$

$=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{35}}$ $=\frac{2}{5}$

18. एक परिवार में दो बच्चे है। यह ज्ञात है कि बच्चों में कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात करो–

Sol. यदि लकड़े को B और लड़की को G से लिखा जाए तो इस प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि

$S=\{BB,BG,GB,GG\}$

अब E = दोनों बच्चे लड़के है।

F = कम से कम एक बच्चा लड़का है।

ओरवावाटी मिशन - 100

तब $E = \{BB\}$ $\qquad$ $F = \{BB, GB, BG\}$

$E \cap F = \{BB\}$ $\qquad$ अतः $P(E) = \frac{1}{4}$,

$P(F) = \frac{3}{4}$, $\qquad$ $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

दोनों बच्चों के लड़के होने की सप्रतिबंध प्रायिकता

$$P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

19. एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतन्त्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ है तो समस्या हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात करो–

Sol. $P(A) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ तथा $P(B) = \frac{1}{3}$

अब P (समस्या हल होना) = (A और B दोनों या दोनों में से कोई एक समस्या हल करेगा)

$= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ $\qquad$ (A और B स्वतंत्र घटना है)

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ $\qquad$ $= \frac{3+2-1}{6}$

$= \frac{4}{6}$ $\qquad$ $= \frac{2}{3}$

अतः समस्या हल होने की प्रायिकता $= \frac{2}{3}$

20. एक पासे को तीन बार उछाला जाता है तो कम से कम एक बार विषम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करो–

Sol. पासे को एक बार उछालने पर विषम संख्या आना सफलता हो तो $P = \frac{1}{2}$

अतः $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

पासे को 3 बार उछाल रहे है अतः $n = 3$

अब P (कम से कम 1 बार विषम संख्या आना) $= P(X \leq 1)$

$= P(x \leq 1)$ $\qquad$ $= 1 - P(x = 0)$

$= 1 - {}^3C_0 P^0 q^3$ $\qquad$ $= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= 1 - \frac{1}{8}$ $\qquad$ $= \frac{7}{8}$

अतः कम से कम एक बार विषम संख्या आने की प्रायिकता $= \frac{7}{8}$

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

21. एक सिक्के की दो उछालों में चितों की संख्या का प्रायिकता बटंन ज्ञात करो–

Sol. एक सिक्के को 2 बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि $5 = \{HH, HT, TH, TT\}$

यहाँ X= चितों की संख्या अत: X = 0, 1, 2

अब P(X = 0) = P (एक भी चित नहीं) $= P(TT) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

P(X = 1) = P (एक चित और एक चित नहीं)

= P(HT) + P(TH) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

P(X = 2) = P (दोनों चित) $= P(HH) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

अत: प्रायिकता बटंन =

X	0	1	2
P(X)	$1/4$	$1/2$	$1/4$

22. एक न्याय सिक्के को 10 बार उछाला जाता है तो ठीक छ: चित आने की प्रायिकता ज्ञात करो–

Sol. यहाँ n = 10

1 सिक्के को उछालने पर चित आना सफलता है

तो $P = \frac{1}{2}$ अत: $q = \frac{1}{2}$

अत: P (ठीक 6 चित आना) = P (X = 6)

$= {}^{10}C_6 P^6 q^{10-6}$ $= \frac{\lfloor 10}{\lfloor 4 \lfloor 6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$= \frac{210}{1024} = \frac{105}{512}$

23. $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{1}{8}$ तब P(A नहीं या B नहीं) ज्ञात करो–

Sol. $\because P(A) = \frac{1}{2},$ $P(B) = \frac{1}{4},$ $P(A \cup B) = \frac{1}{8}$

अब P (A नहीं या B नहीं) $= P(A^1 \cup B^1)$

$= P(A \cap B)^1$

$= 1 - P(A \cap B)$

$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cup B)\}$

$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$$= \frac{8-4-2+1}{8} = \frac{3}{8}$$

24. दो थैले I और II दिए गए है। थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंद है। थैले II में 5 लाल और 6 काली गेंद है। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई है जो लाल रंग की है तो इस बात की क्या प्रायिकता है यह गेंद थैले II से निकाली गई है–

Sol. माना घटना E_1 = प्रथम थैले का चयन

E_2 = द्वितीय थैले का चयन

यहाँ E_1 व E_2 घटनाएँ परस्पर अपवर्जी है।

$P(E_1) = \frac{1}{2}$ तथा $P(E_2) = \frac{1}{2}$

माना घटना A = लाल गेंद निकालना।

तब थैले I से लाल गेंद निकालने की प्रायिकता $P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{3}{7}$

थैले II से लाल गेंद निकालने की प्रायिकता $P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{5}{11}$

अब यदि निकाली गई गेंद लाल रंग की है तो उसके II थैले से निकाले जाने की प्रायिकता

बेज प्रमेय से $$P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}\right)} \qquad \Rightarrow P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{\frac{5}{11}}{\frac{3}{7}+\frac{5}{11}}$$

$$= \frac{\frac{5}{11}}{\frac{33+35}{77}} \qquad = \frac{5}{11}\times\frac{77}{68}$$

$$= \frac{35}{68}$$

25. 52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते एक साथ निकाले जाते है जो ईट के है। तो खो गए पत्ते के ईट के होने प्रायिकता ज्ञात करो–

Sol. माना घटना E_1 = खोया पत्ता ईट का है।

E_2 = खोया पत्ता ईट का नहीं है।

यहाँ E_1 व E_2 परस्पर अपवर्जी घटनाएँ है

$P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ तथा $P(E_2) = \frac{3}{4}$

ओखावाटी मिशन – 100

अब घटना A = शेष पत्तो से 2 ईट के पत्ते निकालना

अब $P\left(\frac{A}{E_1}\right) = P$ (ईट का पत्ता खो जाने के बाद शेष पत्तों से 2 ईट के पत्ते निकालने की प्रायिकता) $= \frac{12}{51} \times \frac{11}{50}$

तथा $P\left(\frac{A}{E_2}\right) = P$ (ईट का पत्ता नहीं खोया है तब शेष पत्तों से 2 ईट के पत्ते निकालना) $= \frac{13}{51} \times \frac{12}{50}$

अतः बेज प्रमेय से खो गए पत्ते के ईट के होने की प्रायिकता $P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$

$$\Rightarrow P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{\frac{12}{50} \times \frac{11}{50} \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{12}{51} \times \frac{11}{50} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{13}{51} \times \frac{12}{50} \times \frac{3}{4}\right)} \qquad = \frac{12 \times 11}{(12 \times 11) + (13 \times 12 \times 3)}$$

$$= \frac{11}{11 + 39} = \frac{11}{50}$$

अतः ईट के पत्ते के खोने की प्रायिकता $= \frac{11}{50}$

26. पासे के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विको की संख्या का मध्य ज्ञात करो–

Sol. यादृच्छिक चर X = द्विकों की संख्या पासे के जोड़े को 3 बार उछाल रहे है अतः X के मान 0, 1, 2, 3 है।

पासे के जोड़े को 3 बार उछाल रहे है अतः द्विक् आने की प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \left\{\begin{matrix} DDD, & DDO & DOO, & OOO \\ & DOD, & ODO & \\ & ODD, & ODD & \end{matrix}\right\}$$ D = द्विक् O = द्विक् नहीं

पासे के एक जोड़े को एक बार उछालने पर प्राप्त द्विक् $= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

अतः द्विक् प्राप्त होने की प्रायिकता $P = \frac{1}{6}$ तथा $q = \frac{5}{6}$

अब $P(X = 0) = P$ (एक भी द्विक् नहीं) = (000) $= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

$$P(X = 1) = 3 \times P(DDO) \quad = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{75}{216}$$

$$P(X = 2) = 3 \times P(DDO)$$

$$= 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$$P(X = 3) = P(DDD)$$

शेखावाटी मिशन - 100

$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

अतः प्रायिकता बटंन

X	0	1	2	3
P(X)	$125/216$	$75/216$	$15/216$	$1/216$

अब मध्य $= \sum \times P(X)$

$= \left(0 \times \frac{125}{216}\right) + \left(1 \times \frac{75}{216}\right) + \left(2 \times \frac{15}{216}\right) + \left(3 \times \frac{1}{216}\right)$

$= \frac{75+30+3}{216}$ $\qquad = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$

27. ताश की गड्डी में से दो पत्ते एक साथ निकाले जाते है। बादशाहों की संख्या का मध्य ज्ञात करो-

Sol. ताश की गड्डी से 2 बादशाह निकालने के प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि $S = \{KK, KO, OK, OO\}$

यहाँ K = बादशाह पत्ता

O = बादशाह के अलावा पत्ता

$\because$ गड्डी से 2 पत्ते निकाल रहे है अतः X = 0, 1, 2

अब P(X = 0) = P (बादशाहों की संख्या शून्य) = P(00) $\qquad = \frac{48}{52} \times \frac{47}{51} = \frac{188}{221}$

P(X = 1) = P (एक बादशाह और एक नहीं) $\qquad = 2 \times P(1 < 0)$

$= 2 \times \frac{4}{52} \times \frac{48}{51} = \frac{32}{221}$

P (X = 2) = P (दोनो बादशाह) = P(KK) $\qquad = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52}$

$= \frac{1}{221}$

अब प्रायिकता बटंन

X	0	1	2
P(X)	$188/221$	$32/261$	$1/221$

मध्य $= \sum XP(X)$ $\qquad = \left(0 \times \frac{188}{221}\right) + \left(1 \times \frac{32}{221}\right) + \left(2 \times \frac{1}{221}\right)$

$= \frac{34}{221}$

28. चर X का प्रायिकता बटंन निम्न है-

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	K	2K	2K	3K	K^2	$2K^2$	$7K^2 + K$

तो ज्ञात करो-

(I) K $\qquad$ (II) P(X < 3)

Sol. सभी प्रायिकताओं का योग एक होता है-

शेखावाटी मिशन - 100

अत: $\sum P(X) = 0$

$$\Rightarrow 0 + K + 2K + 2K + 3K + K^2 + 2K^2 + 7K^2 + K = 1$$

$$\Rightarrow 10K^2 + 9K - 1 = 0 \qquad \Rightarrow 10K^2 + 10K - k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 10K(K+1) - 1(K+1) = 0 \qquad \Rightarrow (K+1)(10K-1) = 0$$

$\Rightarrow K = -1$ (असम्भव) तथा $K = \frac{1}{10}$

अत: $\boxed{K = \frac{1}{10}}$

(II) अब प्रायिकत बटंन

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	$1/10$	$2/10$	$2/10$	$3/10$	$1/100$	$2/100$	$17/100$

अत: P (X < 3) = P (X = 0) + P (X = 1) + P (X = 2)

$$= 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \qquad = \frac{3}{10}$$

29. एक पासे को 6 बार उछाला जाता है। पासे पर सम संख्या प्राप्त होना सफलता है तो ज्ञात करो–

(a) न्यूनतम 5 सफलता की प्रायिकता (b) अधिकतम 5 सफलता की प्रायिकता

Sol. पासे को 6 बार उछाल रहे है अत: n = 6

पासे पर सम संख्या आना सफलता है अत: एक पासे को एक बार उछालने पर सम संख्या आने की प्रायिकता

$P = \frac{1}{2}$ तथा $q = \frac{1}{2}$

$\because P(X = r) = {}^nC_r P^r q^{n-r}$

अत: (1) P (न्यूनतम 5 सफलता) $= P(X \geq 5)$

$$= P(X = 5) + P(X = 6) \qquad = {}^6C_5 P^5 q^1 + {}^6C_6 P^6 q^0$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 1\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

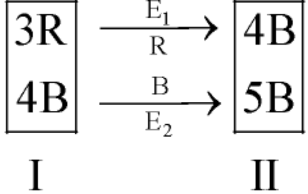
$$= \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{64}$$

(II) P (अधिकतम 5 सफलता) $= P(X \leq 5)$ $= 1 - P(X = 6)$

$$= 1 - \left(\frac{1}{64}\right) \qquad = \frac{63}{64}$$

30. थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंद है। तथा थैले II में 4 लाल और 5 काली गेंद है। एक गेंद थैले I से II में स्थानांतरित की जाती है और तब एक गेंद थैले II से निकाली जाती है। निकाली गई गेंद लाल रंग की है तो स्थानांतरित गेंद के काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए–

शेखावाटी मिशन – 100



Sol. माना घटना E_1 = स्थानांतरित गेंद लाल रंग की है।

E_2 = स्थानातरित गेंद काले रंग की है।

E_1 व E_2 परस्पर अपवर्ती है अत:

$$P(E_1) = \frac{3}{7} \qquad \text{तथा} \quad P(E_2) = \frac{4}{7}$$

अब माना घटना A = II थैले से लाल गेंद निकालना।

$P\left(\frac{A}{E_1}\right) = P$ (लाल रंग की गेंद को स्थानांतरित कर II थैले से लाल गेंद निकालना)

$$= \frac{4+1}{(4+5+1)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$P\left(\frac{A}{E_2}\right) = P$ (काली गेंद स्थनांतरित कर II थैले से लाल गेंद निकालना)

$$= \frac{4}{4+5+1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

अत: बेज प्रमेय से प्राप्त गेंद लाल रंग की है तब स्थानातरित गेंद के काली होने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7} \times \frac{2}{5}}{\left(\frac{3}{7} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{2}{5}\right)}$$

$$= \frac{\frac{8}{35}}{\frac{3}{14} + \frac{8}{35}} = \frac{16}{31}$$

शेखावाटी मिशन - 100

उच्च माध्यमिक परीक्षा मॉडल पेपर - 1
कक्षा - 12 (Maths)
समय - 2 घण्टे 45 मिनट
पूर्णांक - 80

खण्ड - अ

1. ***बहुविकल्पी प्रश्नोत्तर***

(i) समुच्चय {a, b} में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है–

(a) 10 (b) 16 (c) 20 (d) 8

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान बराबर है–

(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

(iii) आव्युह A के लिए $(A^1)^1$ बराबर होता है–

(a) A^1 (b) A (c) AA^1 (d) कोई नहीं

(iv) यदि $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ तो AB का मान होगा–

(a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

(v) यदि A एक 3 × 3 कोटि का वर्ग आव्युह है तो |KA| का मान होगा–

(a) K|A| (b) $K^2|A|$ (c) $K^3|A|$ (d) 3K|A|

(vi) यदि 2x + 3y = sinx तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा–

(a) $\frac{\cos x-2}{3}$ (b) $\frac{-\cos x+2}{3}$ (c) 2 + cosx (d) 3 cosx + 2

(vii) $y=x^{20}$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}=$

(a) $20\,x^{19}$ (b) $380\,x^{18}$ (c) $380\,x^{19}$ (d) $20\,x^{18}$

(viii) sin mx का x के सापेक्ष समाकलन होगा–

(a) $\frac{1}{m}\cos mx+c$ (b) m cos mx + c (c) $-\frac{1}{m}\cos mx+c$ (d) cos mx + c

(xi) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0$ की घात है–

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) परिभाषित नहीं है

शेखावाटी मिशन - 100

(x) यदि शून्यतर सदिश $\vec{a}$ का परिमाण a है और λ एक शून्यतर अदिश है तो $\lambda \vec{a}$ एक मात्रक सदिश है यदि–

(a) $\lambda = 1$ (b) $\lambda = -1$ (c) $a = |\lambda|$ (d) $a = \frac{1}{|\lambda|}$

(xi) यदि $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = 0$ तब $P\left(\frac{A}{B}\right)$ है–

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) परिभाषित नहीं (d) 1

(xii) यदि A तथा B दो ऐसी घटनाऐं है कि $P(A) \neq 0$ और $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$ तब–

(a) $A \subset B$ (b) $B \subset A$ (c) $B = \phi$ (d) $A = \phi$

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(i) $F(x) = x^2, g(x) = \cos x$ तो goF(x) = ...

(ii) $\frac{d}{dx}\left(e^x + 5\cos x\right) =$ ....

(iii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) =$ ....

(vi) $\int_3^4 \frac{1}{x} dx =$..........................

(v) $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तो x = ... तथा y = ...

(vi) $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ तो $\hat{a} =$ ....

3. अति लघुत्तरात्मक प्रश्न–

(i) यदि $F : R \rightarrow R$ जहाँ $F(x) = x^2 - 3x + 2$ तो $F\{F(x)\}$ ज्ञात कीजिए–

(ii) $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए–

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ तो AB ज्ञात कीजिए–

(iv) सारणिक $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करो।

(v) $y = \frac{1}{\sin x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

(vi) $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2} dx$

शेखावाटी मिशन – 100

(vii) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ का सदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(viii) $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx} = 4$ व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

(xi) एक त्रिभुज का सदिश क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजायें $\vec{a} = \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j}$ है।

(x) $P\left(\dfrac{A}{B}\right)$ ज्ञात कीजिए यदि P(B) = 0.5 और $P(A \cap B) = 0.32$

(xi) अवकल समीकरण $y\,dx - \left(x + 2y^2\right)dy = 0$ का समाकलन गुणांक (I.F) ज्ञात कीजिए।

(xii) यदि शीर्ष (2, –6), (5, 4) और (k, 4) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

4. $F(x) = \sin x, F:\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to R$ तथा g(x) = cosx, $g:\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to R$ सिद्ध कीजिए कि F तथा g एकैकी है लेंकिन F + g एकैकी नहीं है।

5. समीकरण निकाय को आव्युह विधि से हल कीजिए–

$4x - 3y = 3, \qquad 3x - 5x = 7$

6. यदि $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ है तो x, y, z तथा w का मान ज्ञात कीजिए।

7. x = 3 पर $F(x) = 2x^2 - 1$ के सांतत्यता की जांच कीजिए।

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx$

9. एक व्यक्ति एक लॉटरी के 50 टिकट खरीदता है जिसमें उसके प्रत्येक में जीतने की प्रायिकता $\dfrac{1}{100}$ है इसकी क्या प्रायिकता है कि वह न्यूनतम एक बार इनाम जीत लेगा।

10. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तो AB ज्ञात करो।

11. $x = at^2, y = 2at$ है तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

12. सारणिक गुणधर्म से सिद्ध कीजिए–

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

13. $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

14. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = -4xy^2$ का विशिष्ट हल ज्ञात करो यदि y = 1 तब x = 0 हो।

शेखावाटी मिशन – 100

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

15. पासों के एक जोड़े को 4 बार उछाला जाता है यदि 'पासों पर प्राप्त अंकों का द्विक् होना' एक सफलता मानी जाती है तो 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

16. यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ तो $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि $\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)+\cos^{-1}x\right]=1$ तो x का मान ज्ञात करो।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

18. यदि $\cos y = x\cos(a+y)$ तो सिद्ध करो $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

अथवा

अन्तराल [2, 4] में फलन $f(x) = x^2$ के लिए मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

19. $\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}}dx$

अथवा

$\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$

20. दर्शाइये कि बिन्दु $A\left(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}\right), B\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)$ और $C\left(7\hat{i}-\hat{k}\right)$ संरेख है।

अथवा

यदि $\vec{a}=5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$ तो दर्शाइये कि सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ तथा $\vec{a}-\vec{b}$ लम्बवत् है।

21. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

अथवा

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3}\frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}dx$

22. अवकल समीकरण $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$ का हल ज्ञात कीजिए।

अथवा

$\frac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x;\ y=0$ यदि $x=\frac{\pi}{3}$ तो विशिष्ट हल ज्ञात करो।

23. 52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते है जो ईट के पत्ते है खो गये पत्ते की ईट होने की प्रायिकता क्या है।

अथवा

एक अनभिनत पासे को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

शेखावाटी मिशन - 100

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

उच्च माध्यमिक परीक्षा मॉडल पेपर - 2
कक्षा - 12 (Maths)
समय - 2 घण्टे 45 मिनट
पूर्णांक - 80

खण्ड - अ

1. बहुविकल्पीय प्रश्न

i. परिमेय संख्याओं के समुच्चय θ पर परिभाषित संक्रिया $a \times b = \frac{ab}{4}$ का तत्समक अवयव है-

(a) 4 (b) 16 (c) 1 (d) 0

ii. $\sin\left[\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ का मान है-

(a) $-\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

iii. निम्न में से कौनसा विकर्ण आव्यूह है-

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

iv. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ हो, तो अवयव a_{32} का मान है-

(a) 0 (b) 7 (c) 3 (d) –1

v. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ का मान है-

(a) 0 (b) 4 (c) 8 (d) 1

vi. $\sin^{-1}x$ का अवकल गुणांक है-

(a) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\sqrt{1-x^2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

vii. $y = e^{2x}$ तब $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा-

(a) $2e^{2x}$ (b) $\frac{e^{2x}}{2}$ (c) $4e^{2x}$ (d) $\frac{e^{2x}}{4}$

viii. $\int a^x da$ होगा-

(a) $a^x \log_{e^a x}$ (b) $\frac{a^{x+1}}{x+1} + c$ (c) $\frac{a^x}{\log_e a} + c$ (d) $a^x + c$

ix. 4 कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है-

(a) 0 (b) 4 (c) 1 (d) 3

x. x, y, z के मान क्या है यदि सदिश $x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}$ और $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ समान है-

(a) 2, 3, 1 (b) 2, –3, 1 (c) 2, 3, –1 (d) 2, –3, –1

शेखावाटी मिशन - 100

xi. $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान होता है–

(a) सदिश राशि (b) अदिश राशि

(c) सदिश या अदिश कोई भी (d) इनमें से कोई नहीं

xii. $P(A) = \frac{7}{13}, P(B) = \frac{9}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$ तब $P\left(\frac{A}{B}\right)$ होगा–

(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{7}{9}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{7}{13}$

2. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

i. समुच्चय A = {1, 2, 3, 4} से स्वयं तक कुल आच्छादक फलनों की संख्या .... है।

ii. $\tan^{-1}\sqrt{3} + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ हो तो x का मान .... है।

iii. यदि $[a_{ij}] = 2i - j$ तब अवयव a_{12} का मान .... है।

iv. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$ का मान .... है।

v. $\frac{d}{dx}\left[\log(\log x)\right]$ का मान .... है।

vi. एकांक सदिश का परिमाण हमेशा .... होता है।

3. अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

i. यदि $f(x) = 8x^3$ तथा $g(x) = x^{1/3}$ हो, तो fog(–1) का मान ज्ञात करो।

ii. $\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right]$ का सरलतम रूप लिखिए।

iii. A = [2 3 4] तथा $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ तो $(AB)^T$ ज्ञात करो।

iv. यदि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ हो, तो x का मान ज्ञात करो।

v. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ के लिए अवयव a_{12} और a_{22} के सहखण्ड ज्ञात करो।

vi. यदि $x = a\cos\theta$ तथा $y = b\sin\theta$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

vii. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$ ज्ञात करो।

viii. अवकल समीकरण $x^5 \frac{dy}{dx} = y^5$ को हल कीजिए।

ix. सिद्ध कीजिए फलन $y = e^x + 1$ अवकल समीकरण $y^{11} - y^1$ का हल है।

x. सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बीच कोण ज्ञात करो।

xi. सदिश $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ का सदिश $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात करो।

शेखावाटी मिशन – 100

xii. $P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = P$ तो P का मान ज्ञात करो यदि A और B स्वतंत्र घटनाऐं हैं।

खण्ड - ब

4. $f(x) = 3 - 4x$ तथा $f : R \to R$ तो सिद्ध कीजिए f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

5. आव्यूह x तथा y ज्ञात करो यदि $2x + 3y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $3x + 2y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

6. प्रारम्भिक संक्रियाओं के प्रयोग से आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात करो।

7. सिद्ध कीजिए $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

8. शीर्ष A(2, –6), B(5, 4), C(K, 4) वाले ΔABC का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो, तो K का मान ज्ञात करो।

9. $f(x) = \begin{cases} Kx+1 & x \le 5 \\ 3x-5 & x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 5$ पर संतत है, तो K का मान ज्ञात करो।

10. यदि $x^y = e^{x-y}$ हो, तो सिद्ध करो $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(\log x + 1)^2}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 6x - x^2}}$ ज्ञात करो।

12. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए
    $y \log y \, dx - x dy = 0$

13. एक समान्तर चतुर्भुज की सलग्न भुजाऐं $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ और $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ है, तो इस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो तथा एक विकर्ण सदिश ज्ञात करो।

14. एक निशानेबाज के लक्ष्य भेदने की प्रायिकता 3/4 है। वह कम से कम कितनी बार गोली चलाए कि लक्ष्य को कम से कम एक बार भेदने की प्रायिकता 0.99 से अधिक हो।

15. एक पारिवारिक चित्र में माता, पिता, पुत्र यादृच्छया खड़े हैं यदि पुत्र एक सिरे पर खड़ा है तो पिता के मध्य में खड़े होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

16. $\int_0^1 \frac{1}{(e^x - 1)} dx$ ज्ञात करो।

खण्ड - स

17. $\tan^{-1}\left[\frac{\cos x}{1 - \sin x}\right] x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ को सरलतम रूप में व्यक्त करो।

OR

समीकरण $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$ को हल कीजिए।

18. यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}$ तथा $y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$ तो सिद्ध करो $x\frac{dy}{dx} + y = 0$

OR

यदि $y = \sin^{-1}x$ तो सिद्ध करो $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$

शेखावाटी मिशन – 100

19. $\int x \tan^{-1} x \, dx$ ज्ञात करो।

OR

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+\tan x}}$ ज्ञात करो।

20. यदि $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ और $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ तब ऐसा $\vec{d}$ ज्ञात करो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ पर लम्ब है तथा $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$ हों।

OR

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन सदिश इस प्रकार है $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ तथा $|\vec{c}| = 5$ तथा इनमें से प्रत्येक, अन्य दो सदिशों के योग के लम्ब हैं, तो $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ ज्ञात करो।

खण्ड - द

21. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ ज्ञात करो।

OR

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right) dx$ ज्ञात करो।

22. अवकल समीकरण $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

OR

अवकल समीकरण $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0$ का हल ज्ञात करो यदि $y = 2$ तथा $x = 1$

23. एक न्याय सिक्के की तीन उछालों पर प्राप्त चितों की संख्या का माध्य ज्ञात करो।

OR

एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है, तो इस बात कि प्रायिकता ज्ञात करो कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

शेखावाटी मिशन - 100

AAYAAM
CAREER ACADEMY
A NEW DIMENSION OF 'SUCCESS'
NEET | XI & XII FOUNDATION

पंखो को खोल
ज़माना सिर्फ
उड़ान
देखता है

Admission Open
Session 2022-23

NEET

FOUNDATION

Result: NEET 2020

131+ विद्यार्थियों का सरकारी मेडिकल कॉलेज में चयन !

AIR
67

JITENDRA KUMAWAT
S/o SURENDRA KUMAR
PALSANA

AIR
197

MANOJ KUMAR
S/o BABU LAL VERMA
PALSANA

A A A A A A
, A ,

उत्कृष्ट परिणाम के लिए
आयाम
ही सर्वोपरी संस्थान

एक बार फिर आयाम ने
साबित की अपनी श्रेष्ठता....

AIR
190
(OBC)

SAKSHAM YADAV
S/O RAJENDRA YADAV
Neem Ka Thana

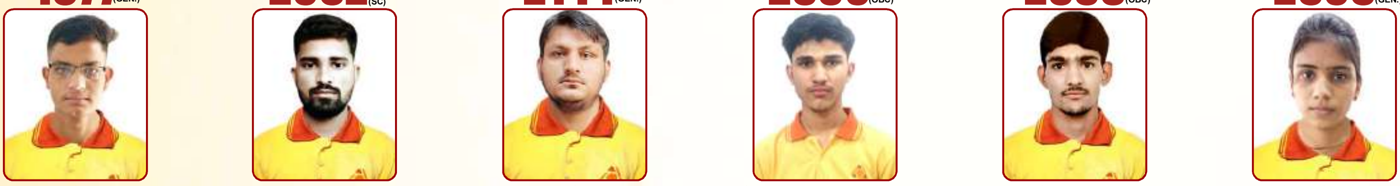
Result: NEET 2021

सीकर में अनुपात की दृष्टि से सबसे ज्यादा सलेक्शन देने वाला संस्थान!

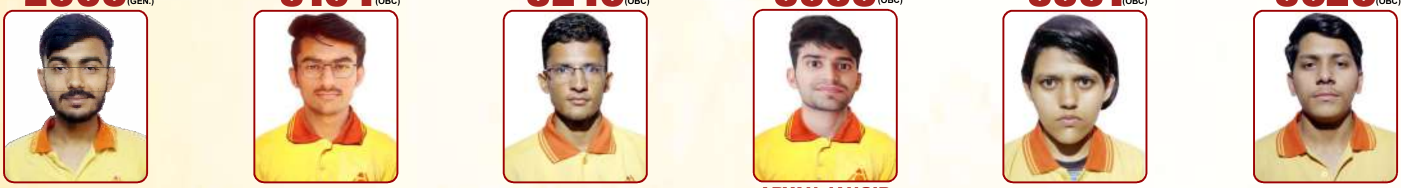
100+ विद्यार्थियों का सरकारी मेडिकल कॉलेज में चयन संभावित !

- AIR 215 (OBC) — **RAGHUVEER YADAV**, S/o SITA RAM YADAV, Chhapoli, Udaipurwati
- AIR 435 (SC) — **RAJESH**, S/o CHHOTU RAM, Tibbi, Hanumangarh
- AIR 470 (OBC) — **NISHANT BAGARIA**, S/o SAGAR BAGARIA, Malikpur, Khandela
- AIR 665 (OBC) — **MANISH YADAV**, S/o Sh. ARJUN LAL YADAV, Amber, Jaipur
- AIR 689 (ST) — **POOJA KUMARI**, D/o Sh. SHANKAR LAL, Lisadiya, Shrimadhopur
- AIR 789 (OBC) — **ARJUN YADAV**, S/o Sh. GOPAL LAL YADAV, Nathi Ka Bas, Renwal
- AIR 828 (SC) — **HIMANSHU KUMARI**, D/o Sh. RAMESH KUMAR, Singrawat Khurd, Didwana

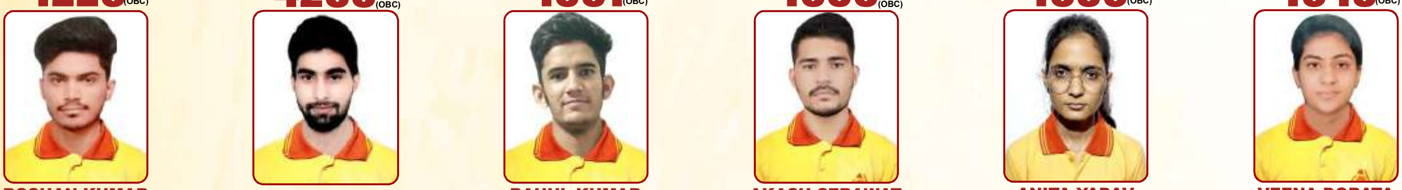
- AIR 902 (OBC) — **GAYATRI SIDDH**, D/o Sh. SAWANT RAM, Napasar, Bikaner
- AIR 940 (OBC) — **NEETU**, D/o Sh. BHOLA RAM, Mathandi, Shrimadhopur
- AIR 1477 (SC) — **YASHWANT VERMA**, S/o Sh. GANPAT LAL, Kadiya Seema, Rajsamand
- AIR 1585 (OBC) — **DEVENDRA KUMAR**, S/o Sh. RAMAVATAR, Jalpali, Shrimadhopur
- AIR 1619 (OBC) — **RAVI SAINI**, S/o Sh. CHIRANJI LAL SAINI, Thanagazi, Alwar
- AIR 1621 (OBC) — **ABHAY SINGH**, S/o Sh. SAGAR SINGH, Kotri Dhayalan, Reengus
- AIR 1841 (GEN.) — **DEVISHI SHARMA**, D/o Sh. JAIPRAKASH SHARMA, Karad, Dantaramgarh



- AIR 1977 (GEN.) — **RAHUL SHARMA**, S/o Sh.OMPRAKASH, Amber,Jaipur
- AIR 2062 (SC) — **BABU LAL NAYAK**, S/o Sh. TAKA RAM, Pogal, Bikaner
- AIR 2144 (GEN.) — **RAHUL SHARMA**, S/o Sh. NANU RAM SHARMA, Jorpura, Renwal
- AIR 2330 (OBC) — **SURENDER MOOND**, S/o Sh. NARSA RAM, Ranisar, Bikaner
- AIR 2338 (OBC) — **RISHI YADAV**, S/o Sh. SHIVPAL YADAV, Gopalpura, Ajitgarh
- AIR 2505 (GEN.) — **POOJA SHARMA**, D/o SH. PAWAN KUMAR, Sari, Chirawa



- AIR 2905 (GEN.) — **ARBAZ KHAN**, S/o SAMSHER KHAN, Mangloona, Laxmangarh
- AIR 3104 (OBC) — **OM PRAKASH**, S/o Sh. SANWALA RAM, Bhedana, Barmer
- AIR 3240 (OBC) — **RAHUL KUMAWAT**, S/o Sh. BABU LAL KUMAWAT, Alisar, Badi Dhani, Chomu
- AIR 3355 (OBC) — **ARYAN JANGIR**, S/o Sh. SANJAY JANGIR, Udaipurwati, Jhunjhunu
- AIR 3381 (OBC) — **SAROJ GEELA**, D/o Sh. JALU RAM GEELA, Geelon Ki Dhani, Lamiya
- AIR 3626 (OBC) — **AJAY KUMAR KURI**, S/o Sh. GOPAL SINGH, Panawali Dhani, Kasarda



- AIR 4228 (OBC) — **ROSHAN KUMAR**, S/o Sh. MANOHAR LAL, Jharli, Thoi
- AIR 4285 (OBC) — **SANGHARSH KUMAR**, S/o Sh. MURARI LAL SAMOTA, Patwari ka Bas, Shrimadhopur
- AIR 4551 (OBC) — **RAHUL KUMAR**, S/o Sh. SITA RAM YADAV, Mohanpura, Kishangarh, Renwal
- AIR 4656 (OBC) — **AKASH SERAWAT**, S/o Sh. PHOOL CHAND, Nimadi, Hathnoda, Chomu
- AIR 4689 (OBC) — **ANITA YADAV**, D/o Sh. BALU RAM YADAV, Munduru, Shrimadhopur
- AIR 4943 (OBC) — **VEENA DORATA**, D/o Sh. MAHIPAL DORATA, Dumoli Khurd, Khetri

- AIR 4951 (OBC) — **RAMESH CHOUDHARY**, S/o Sh. BAJRANG LAL, Lunkaransar
- AIR 5116 (OBC) — **ANIL KUMAR SAINI**, S/o Sh. SHIMBHU DAYAL, Shyampura Bansur, Alwar
- AIR 5467 (OBC) — **ASHISH KUMAWAT**, S/o Sh. KRISHNA GOPAL, Palsana
- AIR 5658 (OBC) — **SANTOSH YADAV**, S/o Sh. RAMAWATAR YADAV, Sherpura, Khori, Shahpura
- AIR 5730 (OBC) — **ROSHAN YADAV**, S/o Sh. BANSHIDHAR YADAV, Etawa-Bhopji, Chomu
- AIR 5945 (OBC) — **ANIL CHOUDHARY**, S/o Sh. SITARAM, Bilanderpur, Shahpura

हर बार...लगातार...

Highest Selection Ratio

Session 19-20	131 Selection
Session 18-19	129 Selection
Session 17-18	108 Selection

SUCCESS

AAYAAM
CAREER ACADEMY
A NEW DIMENSION OF 'SUCCESS'

NEET | XI & XII FOUNDATION

01572-244555, 7300335555 PIPRALI ROAD, SIKAR

E-mail: info@aayaamacademy.com Website: www.aayaamacademy.com

FOLLOW US ON SOCIAL MEDIA

You Tube Subscribe to our YouTube Channel AAYAAM ACADEMY, SIKAR

Follow & Like us on Facebook facebook.com/AAYAAMACADEMYSIKAR

Join us on Whatsapp 7300335555